Galilei, téridő, vonatkerékgyártás

Fülöp Tamás
(KFKI RMKI; Montavid)

ETTE Közgyűlés, 2010.04.27

Berlini gyorsvasúthálózat: 2009 júliusa: szinte teljesen leállt

Kocsik kétharmadán kerékcsere: törékenyek

hibás képlékenységelmélet alapján készültek

Bertram: „A *véges képlékenységelméletek* egyik alapvető problémája a belső változók definíciója, és különösen a képlékeny vagy inelasztikus alakváltozásé. Habár a *képlékeny deformáció* kifejezés meglehetősen szokásosnak tűnik a mérnöki irodalomban, kiderül, hogy nagy deformációk esetén meghatározása rendkívül bonyolult."

A cél: minden eddig ismert problémától mentes véges rugalmas és képlékeny kinematika

Tipikus tárgyalás: (vonatkoztatási rendszer), referencia- t_0 ,

referencia-konfiguráció: anyagi pont $\longleftrightarrow$ t_0-kori $\mathbf{X}$ helye

t -kor $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}(t, \mathbf{X})$ helyen jár, $\mathbf{v}(t, \mathbf{X}) = \dot{\mathbf{u}}\,(t, \mathbf{X})$ seb.

$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{u} \otimes \nabla_{\mathbf{X}} = \mathbf{U}_{\mathrm{L}} \mathbf{O} = \mathbf{O} \mathbf{U}_{\mathrm{R}}$ (poláris felb.) $[\,\nabla \equiv \overleftarrow{\nabla} \equiv \overrightarrow{\nabla}]$

Alakváltozási tenzorok:

$\mathbf{C}_{\mathrm{L}}^{(n)} = {\mathbf{U}_{\mathrm{L}}}^{n}$, $\mathbf{C}_{\mathrm{R}}^{(n)} = {\mathbf{U}_{\mathrm{R}}}^{n}$ (Cauchy-Green, Finger, . . .)

Deformációtenzorok:

$$\mathbf{E}_{\mathrm{L}}^{(n)} = \frac{1}{n} \left({\mathbf{U}_{\mathrm{L}}}^{n} - \mathbf{I} \right), \qquad \mathbf{E}_{\mathrm{L}}^{(0)} = \ln \mathbf{U}_{\mathrm{L}}$$

$$\mathbf{E}_{\mathrm{R}}^{(n)} = \frac{1}{n} \left({\mathbf{U}_{\mathrm{R}}}^{n} - \mathbf{I} \right), \qquad \mathbf{E}_{\mathrm{R}}^{(0)} = \ln \mathbf{U}_{\mathrm{R}}$$

(Green-Lagrange, St. Venant, Biot, Almansi, Hencky, . . .)

$$\mathbf{E}^{\mathrm{Cauchy}} = \mathbf{F}^{\mathrm{S}} - \mathbf{I} = (\mathbf{u} \otimes \nabla_{\mathbf{X}})^{\mathrm{S}}$$

Sok jelölt, kis fantáziával még több. Melyiket (mikor) használni? Pl. melyikben a leglineárisabb egy lin. rugalmas anyag?

Nemlin. rugalmasság, reológia: halmozódik a hiba

Referencia- t_0, referencia-konfiguráció nemfizikai segéd-elemek

A rugalmas deformáció *állapot* kell legyen, nem *változás*
Eltérés a nyugalmi alapállapottól, természetes szerkezettől

A kezdeti állapot sokszor nem nulla deformáltságú $\Longrightarrow$ pl. $\dot{\mathbf{E}}^{\mathrm{Cauchy}} = \left(\mathbf{v} \otimes \nabla_{\mathbf{X}}\right)^{\mathrm{S}}$ plusz $\mathbf{E}^{\mathrm{Cauchy}}(t_0) = \mathbf{E}_0$

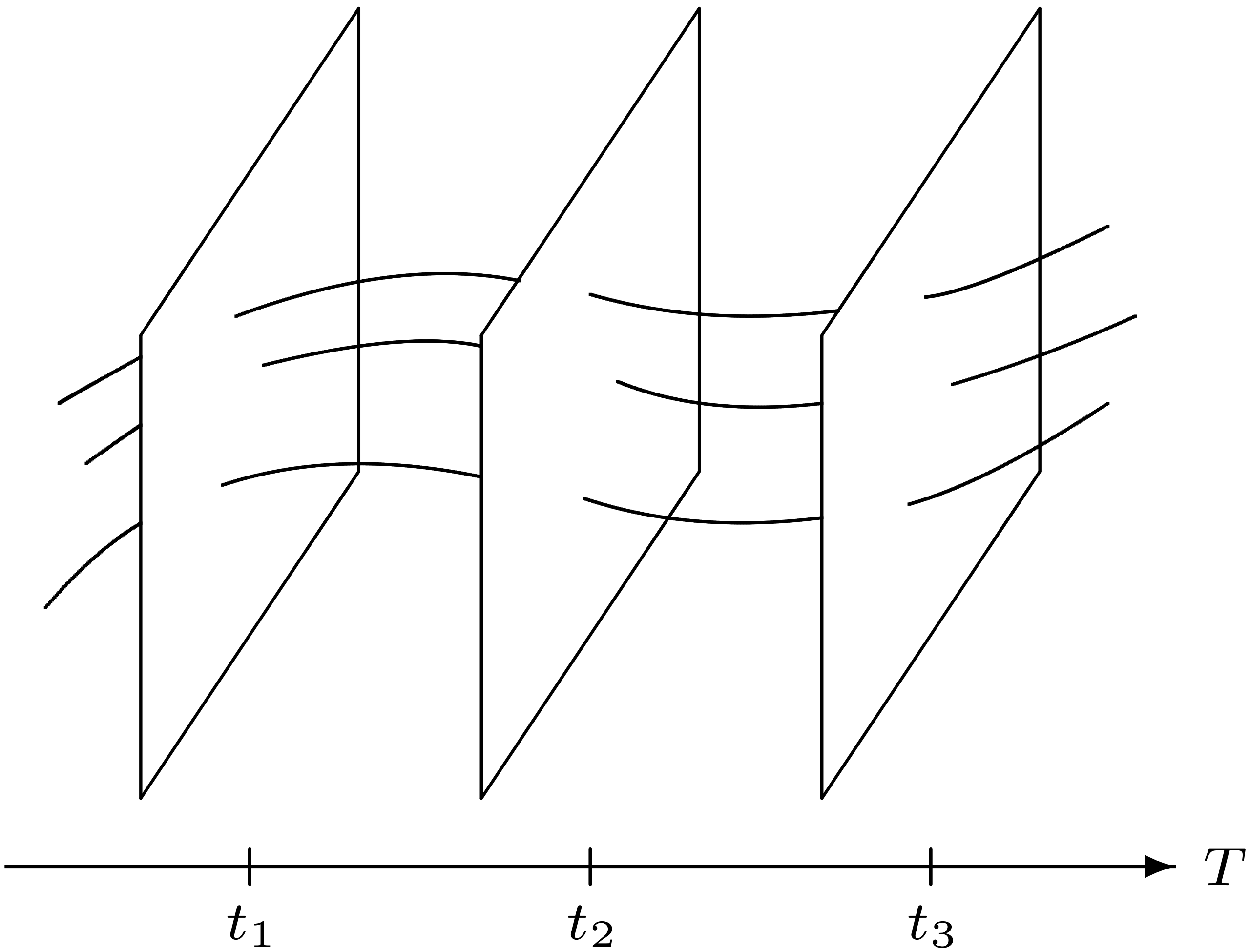
$$\left(\mathbf{U}_{\mathrm{L}}^2\right)^{\bullet} = (\mathbf{v} \otimes \nabla_{\mathbf{x}})\mathbf{U}_{\mathrm{L}}^2 + \mathbf{U}_{\mathrm{L}}^2(\mathbf{v} \otimes \nabla_{\mathbf{x}})^{\mathrm{T}}, \qquad \left(\mathbf{U}_{\mathrm{R}}^2\right)^{\bullet} = 2\,\mathbf{F}^{\mathrm{T}}(\mathbf{v} \otimes \nabla_{\mathbf{x}})^{\mathrm{S}}\,\mathbf{F}.$$

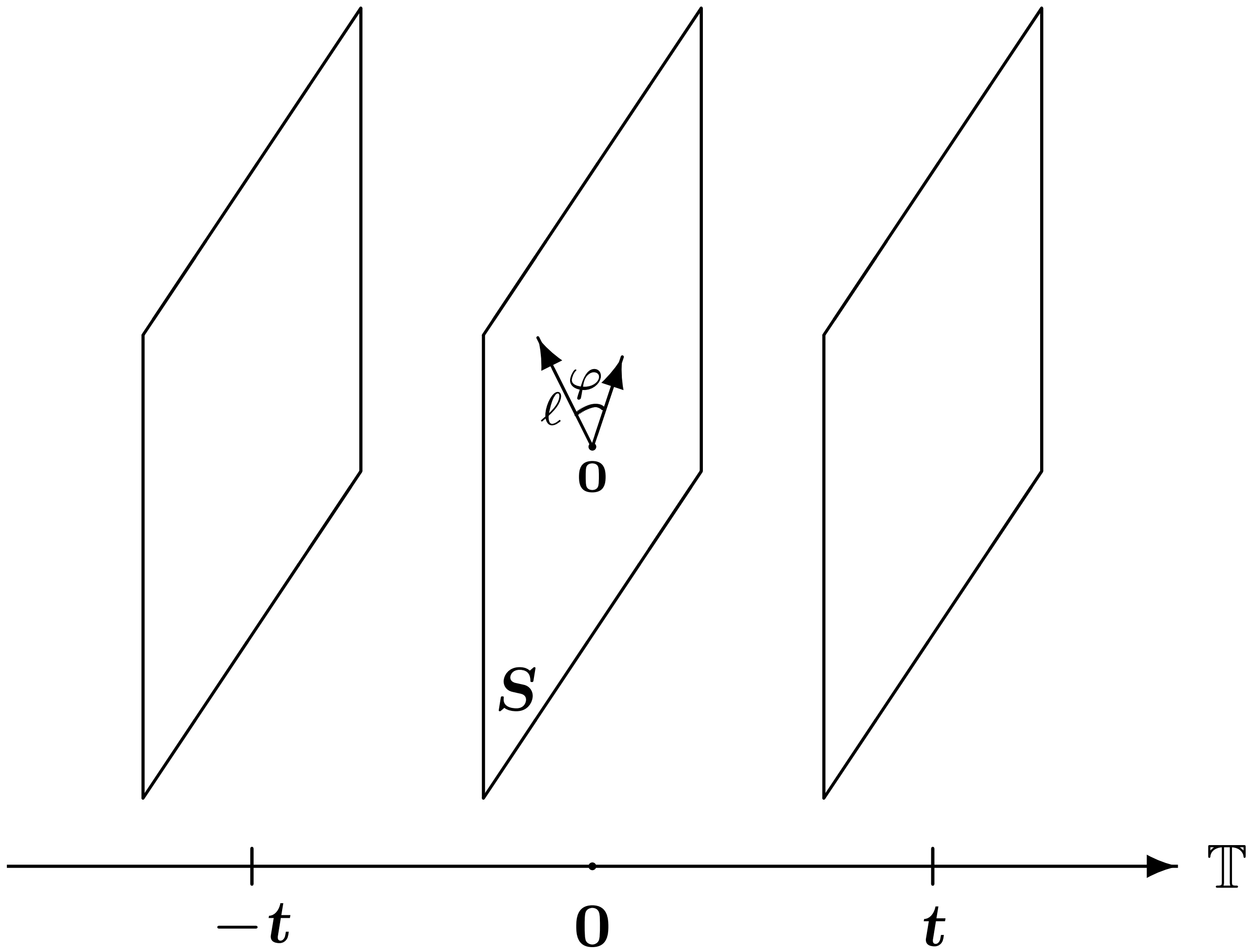
Anyagi objektivitás: segéd-megfigyelő nélkül kellene dolgozni
Anyagi sokaság: inerciális-neminerciális-ra nem érzékeny

Képlékeny deformáció: nincs nullhelyzete, nem *állapot*
A képlékenyedés *változás*: az alapszerkezet változása

Az inerciális szempontot biztosító és megfigyelőmentes leírás:
az affin teres téridőmodell (Weyl, Cartan, ..., Matolcsi)

[$t' = t, \;\; \mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{V}t$ Galilei-tr. $\Longrightarrow \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}$ négyesvektorok, ...]





Téridő-vektorok: euklideszi szerkezet csak a térszerű vektorok háromdimenziós $\boldsymbol{S}$ halmazán

Szilárd közegek: nyugalmi alapszerkezet

$d(p,q)$ távolságok $\quad\Longleftrightarrow\quad$ $\widetilde{\boldsymbol{g}}(p)$ metrika (Riemann-sokaság)

Rugalmas alaktenzor: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{g}^{-1}\boldsymbol{h} = \left(r \otimes \widetilde{\nabla}\right) \widetilde{\boldsymbol{g}}^{-1} \left(r \otimes \widetilde{\nabla}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{h}$

(r a közeg mozgása a téridőben, $\boldsymbol{h}$ a térszerűek skalárszorzata)

$\dot{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{v} \otimes \nabla)\, \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\, (\boldsymbol{v} \otimes \nabla)^{\mathrm{T}}$ (plusz kezdeti feltétel)

általánosított bal-Cauchy-Green

Deformáltságtenzor: $\boldsymbol{D} = \ln\sqrt{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{2} \ln \boldsymbol{A}$

általánosított bal-Hencky

$\boldsymbol{D}$ nyoma a térfogatváltozás: $\quad \mathrm{tr}\boldsymbol{D} = \ln\det\sqrt{\boldsymbol{A}}\,,$

Kis deformáltság: $\boldsymbol{D} \approx \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{A}_{r_t} - \boldsymbol{I}\right) \approx \boldsymbol{E}^{\mathrm{Cauchy}}$

Kompatibilitási feltétel: a görbület nulla $\Longrightarrow$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{tr}_{1,5;3,4}\left[\boldsymbol{A}^{-1}\otimes\boldsymbol{A}^{-1}\left(\boldsymbol{A}\otimes\nabla\right)\left(\boldsymbol{A}\otimes\nabla\right)\right]+\\
&+2\boldsymbol{h}\boldsymbol{A}^{-1}\,\mathrm{tr}_{1,2}\left[\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}^{-1}\left(\nabla\otimes\nabla\otimes\boldsymbol{A}\right)\right]\boldsymbol{A}^{-1}+\\
&+2\boldsymbol{h}\,\mathrm{tr}_{2,3}\left[\boldsymbol{A}^{-1}\otimes\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{h}^{-1}\left(\nabla\otimes\boldsymbol{A}\right)\right]\boldsymbol{A}^{-1}-\\
&-2\boldsymbol{h}\boldsymbol{A}^{-1}\,\mathrm{tr}_{2,4}\left[\left(\boldsymbol{A}\otimes\nabla\otimes\nabla\right)\boldsymbol{h}^{-1}\right]+\\
&+2\mathrm{tr}_{1,4;3,5}\left[\boldsymbol{A}^{-1}\otimes\boldsymbol{A}^{-1}\left(\boldsymbol{A}\otimes\nabla\right)\left(\boldsymbol{A}\otimes\nabla\right)\right]+\\
&+\mathrm{tr}_{1,2;3,5}\left[\boldsymbol{A}^{-1}\left(\boldsymbol{A}\otimes\nabla\right)\left(\boldsymbol{A}\otimes\nabla\right)\boldsymbol{A}^{-1}\right]-\\
&-2\boldsymbol{h}\boldsymbol{A}^{-1}\,\mathrm{tr}_{2,5;3,6}\left[\left(\boldsymbol{A}\otimes\nabla\right)\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}^{-1}\left(\nabla\otimes\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{A}^{-1}\right]\boldsymbol{A}^{-1}+\\
&+2\mathrm{tr}_{2,4}\left[\left(\nabla\otimes\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{A}^{-1}\left(\boldsymbol{A}\otimes\nabla\right)\right]\boldsymbol{A}^{-1}-\\
&-3\mathrm{tr}_{2,6;3,5}\left[\left(\nabla\otimes\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{A}^{-1}\left(\boldsymbol{A}\otimes\nabla\right)\boldsymbol{A}^{-1}\right]-2\left[\nabla\otimes\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}\right)\right]\boldsymbol{A}^{-1}-\\
&-\boldsymbol{h}\,\mathrm{tr}_{3,4;2,5}\left[\boldsymbol{A}^{-1}\otimes\boldsymbol{A}^{-1}\left(\boldsymbol{A}\otimes\nabla\right)\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}^{-1}\left(\nabla\otimes\boldsymbol{A}\right)\right]\boldsymbol{A}^{-1}+\\
&+2\mathrm{tr}_{1,2}\left[\boldsymbol{A}^{-1}\left(\boldsymbol{A}\otimes\nabla\otimes\nabla\right)\right]-\\
&-2\boldsymbol{h}\boldsymbol{A}^{-1}\,\mathrm{tr}_{2,4;3,5}\left[\left(\boldsymbol{A}\otimes\nabla\right)\otimes\boldsymbol{h}^{-1}\left(\nabla\otimes\boldsymbol{A}\right)\right]\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

Kis deformáltság: $\nabla\times\boldsymbol{D}\times\nabla+\text{(magasabbrendű tagok)}=\boldsymbol{0}$

Képlékenyedés: időben változik az alapszerkezet, azaz $\dot{\tilde{\mathbf{g}}} \neq \mathbf{0}$

$$\dot{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{v} \otimes \nabla)\, \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\, (\boldsymbol{v} \otimes \nabla)^{\mathrm{T}} - 2\sqrt{\boldsymbol{A}}\, \boldsymbol{M} \sqrt{\boldsymbol{A}},$$

ahol $\nabla \times \boldsymbol{M} \times \nabla = \mathbf{0}$

Ez az $\boldsymbol{M}$ *képlékenyedési vezértenzor* adandó meg konstitúciósan: mikor, mitől válik nemnullává, mennyivé

Pl. $\boldsymbol{M} = \lambda\, (\boldsymbol{v} \otimes \nabla)^{\mathrm{S}}$

Kis rugalmas deformáltság:
„deformálódás = rugalmas + képlékeny” kiadódik

Képlékenyedés: időben változik az alapszerkezet, azaz $\dot{\tilde{\mathbf{g}}} \neq \mathbf{0}$

$$\dot{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{v} \otimes \nabla)\, \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\, (\boldsymbol{v} \otimes \nabla)^{\mathrm{T}} - 2\sqrt{\boldsymbol{A}}\, \boldsymbol{M} \sqrt{\boldsymbol{A}},$$

ahol $\nabla \times \boldsymbol{M} \times \nabla = \mathbf{0}$

Ez az $\boldsymbol{M}$ *képlékenyedési vezértenzor* adandó meg konstitúciósan: mikor, mitől válik nemnullává, mennyivé

Pl. $\boldsymbol{M} = \lambda\, (\boldsymbol{v} \otimes \nabla)^{\mathrm{S}}$

Kis rugalmas deformáltság:
„deformálódás = rugalmas + képlékeny” kiadódik

KÖSZÖNÖM A FIGYELMET!