AZ INTEGRÁLHATÓSÁGI FELTÉTELEKRÕL

az

izotróp, hiperelasztikus testek

egyensúlyi entrópiájára nézve

ÍRTA: DR. LÁMER GÉZA

KÉZIRAT

Budapest
2007.

TARTALMI KIVONAT

Jelen tanulmányban az ETTE 1. sz. feladatával foglalkoztunk. Maga a feladat az egyensúlyi entrópia olyan alakjának meghatározása, amely lehetõvé teszi, hogy a feszültségtenzort az alakváltozási tenzornak ne három, hanem két fõinvariánsával parametrizálhassuk. A tanulmányban ezt a feladatot felváltottuk az alakváltozási tenzor fõinvariánsaival parametrizált f_i (i = 1,2,3) függvényekre vonatkozó, mint az entrópia egyértelmû meghatározásának integrálhatósági feltételeiként elõállított, parciális differenciálegyenletek integrálásával.

Az így értelmezett feladat megoldásához az integráláson kívül a függvényegyenletekre vonatkozó eljárásokat is fel kellett használni. Ennek keretén belül a figyelembe vett függvények körét szûkítettük: csak összeg és szorzat alakban kerestük a megoldást.

A tanulmányban kitûzött parciális differenciálegyenlet-rendszer megoldását megadtuk részleges egyenletrendszer eseteire, egy- és kétargumentumú függvények összegére, valamint két- és egyargumentumú függvények szorzataira, mint háromargumentumú függvények esetére. Ezen feltételek mellett teljes megoldást adtunk. Egy példán megmutattuk, hogy az egyenletrendszer egy részének létezik megoldása a hatványfüggvények körében (is). A tanulmányban a nem összeggel és szorzással értelmezett algebrai, és a transzcendens függvények eseteivel nem foglalkoztunk.

A nyert megoldások között nincs olyan szerkezetû, amelyben egy f_i függvény kifejezhetõ lenne a két másik segítségével, ellenben a legáltalánosabb megoldások szerkezete azonos: létezik egy két- és egy egyváltozós függvények szorzataként értelmezett háromváltozós függvény, amelynek a különbözõ parciális differenciálkifejezéseik segítségével mindhárom f_i (i = 1,2,3) függvény egyértelmûen meghatározható. A (csak) kétargumentumos megoldások alapvetõen csak két f_i függvény meghatározását teszik lehetõvé, bár van olyan is, amely mindhárom f_i (i = 1,2,3) függvényt meghatározza. Az egyargumentumos megoldások alapvetõen partikuláris megoldások. Az integrálás során meghatároztunk néhány konkrét algebrai függvényt is. Az integrálások során állítottunk fel néhány integrál-azonosságot.

A tanulmányban az összes elõállított f_i (i = 1,2,3) függvényhez meghatároztuk az egyensúlyi entrópiát. Ennek során beláttuk, hogy a legáltalánosabb megoldások esetén az egyensúlyi entrópia kifejezhetõ egy háromváltozós függvény segítségével. Ugyanakkor ez a függvény közvetlenül nem azonos egyik f_i (i = 1,2,3) függvénnyel sem, hiszen ennek a függvénynek a különbözõ parciális differenciálkifejezései határozzák meg az f_i (i = 1,2,3) függvényeket.

A nyert megoldások szerkezete azonos; sõt, megegyezik az eredeti feladat szerkezetével. Azaz formailag új információt a megoldás nem tartalmaz. Ezért megvizsgáltuk általánosságban egy s függvény három parciális differenciáljára vonatkozó egyenletrendszert. Ennek során az egyes parciális differenciálhányadosokat három tetszõleges f_i függvény tetszõleges lineáris kombinációjaként írtuk fel, és oldottuk meg az így nyert feladatot. A megoldás struktúrája megegyezett a kiindulási parciális differenciálegyenlet-rendszer struktúrájával. Ezt követõen meghatároztuk azon függvényegyütthatók körét, amelyekre az f_i függvényekre vonatkoztatott integrálhatósági feltételek felírhatók, és megoldottuk a feladatot; ennek során is analóg eredményt kaptunk. Végezetül megvizsgáltuk azt az esetet, amikor a három f_i függvény lineáris kombinációjában szereplõ együtthatók az x_i változók tetszõleges függvényei. Az eddig követett úttól eltérõ módszert alkalmazva meghatározható mind a három f_i függvény, mind az s függvény. Ez esetben is az f_i függvények szerkezete megegyezett a kiindulási parciális differenciálegyenlet-rendszer struktúrájával. Következésképpen megállapítható, hogy az ETTE 1. sz. kitûzött feladatának a tanulmányban adott megoldása elméletileg helytálló.

Egy speciális esetben – $f_3 = a_1 f_1 + a_2 f_2$ – meghatároztuk mind a három f_i függvényt, és az s függvényt értékét összeg- és szorzatfüggvények esetében. Rámutattunk azokra a lehetséges kapcsolatokra, amelyek elvben az f_1, az f_2 és az f_3 között fennállhatnak.

Néhány egyedi esetre megadtuk az f_i, és az s függvények értékeit.

Végezetül kitértünk a feszültség és az alakváltozási tenzorok kapcsolatának néhány matematikai és fizikai kérdésére.

A kitûzött feladatra a válasz az, hogy

- az f_i függvények között fenn kell állniuk egy (5.71) típusú összefüggésnek,
- ehhez a (5.78) alatti s függvény tartozik,
- ennek a matematikai háttere az, hogy az f_i függvényeket egy s függvény elsõrendû parciális differenciáljainak „lineáris függvénykombinációjaként” állítottuk elõ,
- az f_i függvények közötti bárminemû további kapcsolatot az f_i függvényekre megadott összefüggésekbõl levezetni nem lehet,
- az f_i függvények közötti bárminemû további kapcsolat megadása esetén az s függvénynek ehhez a kapcsolathoz tartozó „egyedi” tulajdonságai meghatározhatók.

TARTALOM

JELÖLÉSEK

a_{ij}	–	együtthatók
$a_{ij}(x_1,x_2,x_3)$	–	együtthatófüggvények
$\overset{k}{c}_i, \overset{k}{c}_{ij}, \overset{kl}{c}_i, \overset{kl}{c}_{ij}$	–	különbözõ segédegyütthatók az integrálás során
$\overset{k}{\hat{c}}_i, \overset{k}{\hat{c}}_{ij}, \overset{kl}{\hat{c}}_i, \overset{kl}{\hat{c}}_{ij}$	–	különbözõ segédegyütthatók az integrálás során, midõn x_3-mal osztunk
$\overset{n}{C}, \overset{n}{C}_k$	–	különbözõ együtthatók az n-dik részleges megoldásban, vagy annak k-adik változatában
f_i	–	a Cayley–Hamilton-tételben szereplõ együtthatófüggvények
$f_{ij}(x_j)$	–	($i = j$ = 1,2,3) egyargumentumú közelítés
$f_{ij}(x_{j+1\vert\mathrm{mod}\,3}, x_{j+2\vert\mathrm{mod}\,3})$	–	($i = j$ = 1,2,3) kétargumentumú közelítés
$\hat{f}_{ij}(x_j)$	–	($i = j$ = 1,2,3) egyargumentumú közelítés, midõn x_3-mal osztunk
$\hat{f}_{ij}(x_{j+1\vert\mathrm{mod}\,3}, x_{j+2\vert\mathrm{mod}\,3})$	–	($i = j$ = 1,2,3) kétargumentumú közelítés, midõn x_3-mal osztunk
$\overset{k}{f}_i, \overset{k}{f}_{ij}, \overset{kl}{f}_i, \overset{kl}{f}_{ij}$	–	különbözõ segédfüggvények az integrálás során
$\overset{k}{\hat{f}}_i, \overset{k}{\hat{f}}_{ij}, \overset{kl}{\hat{f}}_i, \overset{kl}{\hat{f}}_{ij}$	–	különbözõ segédfüggvények az integrálás során, midõn x_3-mal osztunk
$\overset{n}{F}_j(x_j)$	–	egyargumentumú függvény az n-edik részleges megoldásban
$\overset{nk}{F}_j(x_j)$	–	egyargumentumú függvény az n-edik részleges megoldás k-adik változatában
$\overset{n}{F}_{ij}(x_i, x_j)$	–	kétargumentumú függvény az n-edik általános megoldásban
$\overset{n}{G}_j(x_j)$	–	egyargumentumú függvény az n-edik általános megoldásban
$\overset{n}{\mathsf{F}}_i$	–	az n-edik részleges megoldás i-edik függvénye
$\overset{nk}{\mathsf{F}}_i$	–	az n-edik részleges megoldás k-adik változatának az i-edik függvénye
$\overset{n}{\mathsf{G}}_i$	–	az n-edik általános megoldásnak az i-edik függvénye
s	–	az entrópiafüggvény
$\overset{n}{s}$	–	az n-edik részleges megoldás entrópiafüggvénye
$\overset{n}{s}_i$	–	az n-edik részleges megoldás entrópiafüggvénye, amely az x_i szerinti integrálással áll elõ
$\overset{n}{\mathsf{S}}$	–	az n-edik általános megoldás entrópiafüggvénye
$\tilde{s}_i$	–	az entrópiafüggvény integrálási szabad függvénye az x_i szerinti integrálással

1. BEVEZETÉS

Az ETTE 1. sz. kitûzött feladata a következõ.

Izotróp, rugalmas anyagú kontinuumok esetén – a Cayley–Hamilton-tétel figyelembe vételével – a feszültségtenzor az alakváltozási tenzor nulladik, elsõ és második hatványainak összegeként írható fel úgy, hogy a tagok együtthatói – a továbbiakban ezt fogjuk f_i, (i = 1,2,3) függvényeknek nevezni – az alakváltozási tenzor fõinvariánsainak függvényei.

Hiperelasztikus testek esetén az f_i, (i = 1,2,3) függvények az s egyensúlyi entrópiafüggvény (szabadenergia-függvény) parciális differenciálhányadosaival írhatók fel. Ezekben az összefüggésekben mindhárom f_i függvény szerepel.

Az ETTE 1. sz. feladata arra vonatkozik, hogy milyen feltételek mellett lehet az anyagtörvényt nem három, hanem csak két f_i függvénnyel felírni.

Maga a feladat fizikai indíttatású, hiszen az alakváltozások olyan összefüggéseit keresi, amely összefüggések mellett az anyagtörvény már nem az alakváltozási tenzor mindhárom fõinvariánsától, hanem csak két (esetleg egy) fõinvariánsától függ. Ugyanakkor a feladat megfogalmazható tisztán matematikai szempontból is. Ez a következõ.

Adott az s függvényre az alábbi három parciális differenciálkifejezés:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial s}{\partial x_3}, \tag{2.1}$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{x_3}\left(\frac{\partial s}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial s}{\partial x_2}\right), \tag{2.2}$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{x_3}\frac{\partial s}{\partial x_2}. \tag{2.3}$$

Keressük azokat az általános feltételeket, amikor pl. f_3 kifejezhetõ f_i (i = 1,2) segítségével, $f_3 = \Phi_3 \circ (f_1, f_2)$, vagy hasonló összefüggés áll fenn az indexek ciklikus permutációja esetén.[1]

[1] Mivel a feladat (lásd az (1-3) egyenletrendszert) nem rendelkezik ciklikus szimmetriával, ezért a ciklikus permutációval bíró megoldás feltételezése megalapozatlannak tûnik.

2. A KITÛZÖTT FELADAT ÁLTALÁNOS VIZSGÁLATA

2.1. A kitûzött feladat, mint az (1-3) egyenlet integrálása

Mielõtt a kitûzött feladat megoldásához kezdenénk, elõször megvizsgáljuk az (1-3) egyenletrendszert. Ez egy elsõrendû, parciális differenciálegyenlet-rendszer. Ezen egyenletrendszer kapcsán feltehetõ az a kérdés, hogy mi az integrálhatóság feltétele.

Itt és a továbbiakban az $f_i(x_1, x_2, x_3)$, (i = 1,2,3) függvények argumentumait nem írjuk ki; ahol az argumentumokat nem írjuk ki, ott mindig mindhárom argumentumtól való függést tételezzük fel. Megjegyezzük, hogy ez a konvenció az s függvényre is vonatkozik.

Az integrálhatósági feltétel meghatározásához felírjuk az s függvény elsõ parciális deriváltjait. Ennek során a (2) egyenletbõl az x_2 szerinti parciális deriváltat kiküszöböljük.

$$\frac{\partial s}{\partial x_1} = x_3 f_2 - x_1 x_3 f_3, \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_2} = x_3 f_3, \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_3} = f_1. \tag{2.6}$$

Felírjuk az s függvény vegyes, második parciális deriváltjait, mint (4-6) integrálhatósági feltételeit.

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x_1 \partial x_2} \qquad \frac{\partial}{\partial x_2}(x_3 f_2 - x_1 x_3 f_3) = \frac{\partial}{\partial x_1} x_3 f_3, \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x_2 \partial x_3} \qquad \frac{\partial}{\partial x_3} x_3 f_3 = \frac{\partial}{\partial x_2} f_1, \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x_3 \partial x_1} \qquad \frac{\partial}{\partial x_1} f_1 = \frac{\partial}{\partial x_3}(x_3 f_2 - x_1 x_3 f_3). \tag{2.9}$$

Tehát az (1-3), azaz a (4-6) egyenletrendszer integrálhatósági feltételei a (7-9) összefüggések. Egyúttal ezek azok a legáltalánosabb összefüggések, amelyek az f_i, (i = 1,2,3) függvények között fennállnak-fennállhatnak. Ugyanakkor ezek az összefüggések nem teszik lehetõvé, hogy az f_i, (i = 1,2,3) függvények közül egyet a másik kettõvel kifejezzük. Ennek az az egyszerû oka, hogy a (7-9) egyenletrendszerben nem szerepelnek az f_i, (i = 1,2,3) függvények összes parciális differenciálhányadosai.

A továbbiakban két lehetõség közül választhatunk. Az egyik, hogy valamilyen *ad hoc* feltevéssel keresünk egy $f_3 = \Phi_3 \circ (f_1, f_2)$ típusú összefüggést; ezt nem kívánjuk megtenni. A másik, hogy megkeressük a (7-9) egyenletrendszer legáltalánosabb megoldását, majd azt követõen vizsgáljuk meg egy $f_3 = \Phi_3 \circ (f_1, f_2)$ típusú összefüggés létezésének a feltételeit. Ezt az utat választjuk.

Tehát a következõ lépésben felírjuk a f_i, (i = 1,2,3) függvények egyes vegyes, második parciális differenciálkifejezéseit, mint (7-9) integrálhatósági feltételeit.

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} \qquad \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_3} x_3 f_3 = \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_3}(x_3 f_2 - x_1 x_3 f_3)\,, \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial^2 (x_3 f_2 - x_1 x_3 f_3)}{\partial x_2 \partial x_3} \qquad \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_1} f_1 = \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\partial}{\partial x_1} x_3 f_3\,, \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial^2 x_3 f_3}{\partial x_3 \partial x_1} \qquad \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\partial}{\partial x_2}(x_3 f_2 - x_1 x_3 f_3) = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2} f_1\,. \tag{2.12}$$

A (10-12) egyenleteket áttekintve megállapíthatjuk, hogy a (10), (11) és (12) egyenlet rendre a (7), (8), illetve a (9) egyenlet x_3, x_1, illetve x_2 szerinti parciális deriváltja. Következésképpen a (7-9) egyenletek (10-12) integrálhatósági feltételei megegyeznek a kiinduló, azaz a (7-9) egyenletekkel. Másképpen fogalmazva, a (10-12) egyenletek nem adnak újabb összefüggéseket az f_i, (i = 1,2,3) függvények parciális differenciálhányadosaira nézve. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy egyrészt maga a (7-9) egyenletrendszer integrálható, másrészt, hogy a (7-9) egyenleteket kielégítõ f_i, (i = 1,2,3) függvények esetén a (4-6), tehát az (1-3), egyenletrendszer egyértelmûen integrálható.

Tehát kizárva egy ad hoc $f_3 = \Phi_3 \circ (f_1, f_2)$ összefüggés keresését-vizsgálatát, valamint az integrálhatóságra vonatkozó fejtegetéseket figyelembe véve, az ETTE 1. sz. feladatának más értelmezést adunk.

A kitûzött feladatot elsõdlegesen a (7-9) egyenletek integrálásaként fogjuk fel. Ennek megfelelõen nem az f_i, (i = 1,2,3) függvények közötti összefüggés(eke)t keressük, hanem integráljuk a (4-6) egyenleteket, azaz azt határozzuk meg, hogy hogyan függ az s függvény az f_i, (i = 1,2,3) függvényektõl. Megjegyezzük, hogy nem kizárt, hogy eközben az f_i, (i = 1,2,3) függvények közötti összefüggések is kiadódnak. Amennyiben sikerül a (7-9) egyenletrendszert integrálni, úgy az alapján az s függvény a (4-6) egyenletrendszerbõl egyértelmûen meghatározható.

Mielõtt rátérnõk a (7-9) egyenletrendszer integrálására, egyrészt a rendszer struktúráját, másrészt néhány egyszerûbb struktúrájú megoldást vizsgálunk meg. A következõ pontban a differenciálegyenlet-rendszer „hiányos” voltából adódó „független” megoldásokat vizsgáljuk. A 3. fejezetben a részleges – tehát csak két, vagy egy f_i függvényt magába foglaló, illetve csak két változótól függõ – megoldásokat vizsgáljuk. Az egy-, illetve kétváltozós megoldás struktúráit a 4. fejezetben tekintjük át. Az általános integrálást az 5. fejezetben végezzük el.

2.2. A (7-9) egyenletrendszer „független” megoldásai

A (7-9) egyenletrendszerbõl látható, hogy

– az f_1 függvény x_3 szerinti parciális deriváltja,

– az $x_3 f_2$ függvény x_1 szerinti parciális deriváltja

nem szerepel a rendszerben, ugyanakkor

– az $x_3 f_3$ függvény x_1, x_2 és x_3 szerinti parciális deriváltja

szerepel a rendszerben.

Ebbõl következik, hogy az

$$f_1 = \overset{0}{F}_3(x_3)\,, \tag{2.13a}$$

$$f_2 = \overset{0}{F}_1(x_1)/x_3\,, \tag{2.13b}$$

$$f_3 = \overset{0}{C}/x_3 \tag{2.13c}$$

függvények „kielégítik” az (7-9) egyenletrendszert. Ezeket a differenciálegyenlet-rendszertõl „független” megoldásoknak tekintjük.

2.3. A (7-9) egyenletrendszer független megoldásaihoz tartózó *s* függvény

Integrálva az (4-6) egyenletrendszert, a (13) függvények figyelembevételével, az s függvényre az alábbi kifejezéseket nyerjük.

$$\overset{0}{s}_1 = \int \overset{0}{F}_1(x_1)dx_1 - \int \overset{0}{C}\,x_1 dx_1 = \overset{0}{\mathrm{s}}_1(x_1) - \overset{0}{C}\frac{x_1^2}{2}\,, \tag{2.14a}$$

$$\overset{0}{s}_2 = \int \overset{0}{C}\,dx_2 = \overset{0}{C}\,x_2\,, \tag{2.14b}$$

$$\overset{0}{s}_3 = \int \overset{0}{F}_3(x_3)dx_3 = \overset{0}{\mathrm{s}}_3(x_3)\,, \tag{2.14c}$$

azaz

$$\overset{0}{s} = \overset{0}{\mathrm{s}}_1(x_1) - \overset{0}{C}\left(\frac{x_1^{\,2}}{2} - x_2\right) + \overset{0}{\mathrm{s}}_3(x_3)\ . \tag{2.15}$$

Ellenõrzés.

$$f_1 = \frac{\partial \overset{0}{\mathrm{s}}_3(x_3)}{\partial x_3}\ , \tag{2.16a}$$

$$f_2 = \frac{1}{x_3}\left(\frac{\partial \overset{0}{\mathrm{s}}_1(x_1)}{\partial x_1} - \overset{0}{C}\, x_1 + \overset{0}{C}\, x_1\right) = \frac{1}{x_3}\frac{\partial \overset{0}{\mathrm{s}}_1(x_1)}{\partial x_1}\ , \tag{2.16b}$$

$$f_3 = \overset{0}{C} / x_3\ . \tag{2.16c}$$

Összevetve a (13) alatti f_i, (i = 1,2,3) függvényekkel, az egyezés nyilvánvaló.

Következtetés

Az $\overset{0}{s}$ függvény (15) alatti kifejezésébõl nyert f_i, (i = 1,2,3) függvények – lásd a (16) képleteket – azonosan kielégíti az (7-9) egyenletrendszert, méghozzá úgy, hogy egyszerûen nem szerepelnek az egyenlet egyik oldalán sem. Formálisan integrálási „állandóknak” kell tekinteni. Mivel valójában függvények, ezért a *„független” megoldás* kifejezés helyett az *integrálási szabad függvény* kifejezést alkalmazzuk rájuk.

2.4. A (4-6) egyenletrendszer integrálási szabad függvényei

A (4-6) egyenleteket integrálva egy-egy integrálási szabad függvényt kellett volna a (14) egyenletekben feltüntetni. Ezek a következõk.

$$\tilde{s}_1 = \tilde{s}_1(x_2, x_3)\ , \tag{2.17a}$$

$$\tilde{s}_2 = \tilde{s}_2(x_3, x_1)\ , \tag{2.17b}$$

$$\tilde{s}_3 = \tilde{s}_3(x_1, x_2)\ . \tag{2.17c}$$

A (17) alapján az $\tilde{s}$ függvény legáltalánosabb alakja

$$\tilde{s} = \tilde{s}_1(x_2, x_3) + \tilde{s}_2(x_3, x_1) + \tilde{s}_3(x_1, x_2)\ . \tag{2.18}$$

A (18) $\tilde{s}$ függvényhez tartózó $\tilde{f}_i$, (i = 1,2,3) függvények (1-3) alapján

$$\tilde{f}_1 = \frac{\partial \tilde{s}_1(x_2, x_3)}{\partial x_3} + \frac{\partial \tilde{s}_2(x_3, x_1)}{\partial x_3}\ , \tag{2.19a}$$

$$\tilde{f}_2 = \frac{1}{x_3}\left[\frac{\partial \tilde{s}_2(x_3,x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{s}_3(x_1,x_2)}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial \tilde{s}_1(x_2,x_3)}{\partial x_2} + x_1\frac{\partial \tilde{s}_3(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right], \qquad (2.19b)$$

$$\tilde{f}_3 = \frac{1}{x_3}\left[\frac{\partial \tilde{s}_1(x_2,x_3)}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{s}_3(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right]. \qquad (2.19c)$$

Mivel a (16) összefüggések egyértelmûen adják vissza az f_i, (i = 1,2,3) függvényeket – lásd a (13) képleteket –, ezért a (19) alapján meghatározott $\tilde{f}_i$, (i = 1,2,3) függvényeknek el kell tûnniük.

Megjegyezzük, hogy általában a (17) alatti integrálási szabad függvények szerepe a következõ. Az f_i, (i = 1,2,3) függvények integrálása során kapunk olyan függvényeket, amelyek az egyik soron jelentkeznek, de a másik soron nem; ekkor az s-re vonatkozóan ebben a sorban a (17) alapján lehet értelmezni az s függvény megfelelõ elemét. Ezen túlmenõen, a (18) megoldást csak abban a formában szabad figyelembe venni, hogy az abból (19) szerint nyert $\tilde{f}_i$, (i = 1,2,3) függvények eltûnjenek.

Ez utóbbi feltétel alapján az $\tilde{s}$ függvényre általánosságban az alábbi összefüggések írhatók fel.

$$\frac{\partial \tilde{s}_1(x_2,x_3)}{\partial x_3} + \frac{\partial \tilde{s}_2(x_3,x_1)}{\partial x_3} = 0, \qquad (2.20a)$$

$$\frac{\partial \tilde{s}_2(x_3,x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{s}_3(x_1,x_2)}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial \tilde{s}_1(x_2,x_3)}{\partial x_2} + x_1\frac{\partial \tilde{s}_3(x_1,x_2)}{\partial x_2} = 0, \qquad (2.20b)$$

$$\frac{\partial \tilde{s}_1(x_2,x_3)}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{s}_3(x_1,x_2)}{\partial x_2} = 0. \qquad (2.20c)$$

A (20b) összefüggés a (20c) képlet alapján a

$$\frac{\partial \tilde{s}_2(x_3,x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{s}_3(x_1,x_2)}{\partial x_1} = 0 \qquad (2.20b')$$

alakba írható.

Mivel az egyes függvények csak két argumentumtól függenek, ezért a vegyes parciális deriváltjaik eltûnnek, azaz

$$\frac{\partial^2 \tilde{s}_3(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \qquad (2.21a)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{s}_2(x_3,x_1)}{\partial x_1 \partial x_3} = 0, \qquad (2.21b)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{s}_1(x_2, x_3)}{\partial x_2 \partial x_3} = 0 . \tag{2.21c}$$

Következésképpen minden $\tilde{s}_i$, (i = 1,2,3) függvény a független változóiban lineáris.

$$\tilde{s}_3(x_1, x_2) = c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + \qquad + c_{30} , \tag{2.22a}$$

$$\tilde{s}_2(x_3, x_1) = c_{21}x_1 + \qquad + c_{23}x_3 + c_{20} , \tag{2.22b}$$

$$\tilde{s}_1(x_2, x_3) = \qquad c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + c_{10} . \tag{2.22c}$$

Visszahelyettesítve a (20) egyenletekbe az együtthatókra a

$$c_{31} + c_{32} = 0 , \tag{2.23a}$$

$$c_{21} + c_{23} = 0 , \tag{2.23b}$$

$$c_{12} + c_{13} = 0 \tag{2.23c}$$

összefüggéseket nyerjük. Ezek fennállása esetén az $\tilde{s}_i$, (i = 1,2,3) függvények (20) alatti kifejezései valóban egyenlõk zérussal.

A fentiek alapján a (4-6) egyenletrendszer integrálási szabad függvényei általánosságban (17) alapján írhatók fel, ezeket az s függvény egyértelmû meghatározásához figyelembe kell venni. Ugyanakkor a (22) alatt megadott integrálási szabad függvények az f_i (i = 1,2, 3) függvényeket nem befolyásolják. Ezért az s függvény meghatározása során a (17) típusú integrálási szabad függvényeket ugyan sosem írjuk ki, de az s-re vonatkozó általános integrál felírásánál létezésüket figyelembe vesszük. Végül, az s függvény meghatározása során a (22) integrálási szabad függvényeket sosem írjuk ki.

2.5. A megoldás módjáról

A vizsgálandó egyenletrendszer formálisan parciális differenciálegyenlet-rendszer. Valójában nem minden parciális derivált szerepel a rendszerben, ezért nem teljes ebben az értelemben. Az egyenletrendszer további sajátossága, hogy egy-egy egyenlet csak két független változó szerinti parciális differenciálkifejezést tartalmaz, és minden egyenlet más és más párosítást. Ez egyúttal egyfajta belsõ szimmetriát eredményez, bár nem az f_i függvényekre, hanem csak azok egyfajta függvénykombinációjára. (Ennek ismertetését lásd a 7.1. pontban.) Végül peremfeltételek nincsenek kitûzve. Ezeket figyelembe véve jobbnak tûnik a vizsgálandó egyenleteket függvényegyenleteknek (is) tekinteni.

Ennek okán a függvényekre nézve azt fogjuk vizsgálni, hogy az egyes független változókban azonosak-e. Ezt teljes általánosságban nem kívánjuk megtenni. A tanulmányban az *összeg* és a *szorzat* típusú függvényeket vizsgáljuk meg. Ezzel együtt a tanulmányban sem az összegtõl és a szorzattól eltérõ (pl. tört) *algebrai*, sem a *hatvány,* sem más *transzcendens* függvénykapcsolatokat, sem pedig a függvények *sorozatként való elõállításá*nak a lehetõségét nem vizsgáljuk.

Azt, hogy a vizsgált függvény – független változó szerinti – struktúrája jelentõs szerepet játszik, az $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ $f_3 = \overset{*}{f}_3(x_1, x_2)/x_3$ szerkezetû megoldáson mutatjuk be. Értelemszerûen, ez egy részleges megoldás.

Ez esetben a megoldandó egyenlet:

$$\frac{\partial \overset{*}{f}_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \overset{*}{f}_3}{\partial x_2} x_1 = 0 . \qquad (\bullet)$$

A megoldás összegalakban:

$$\overset{*}{f}_3(x_1, x_2) = c\left(\frac{x_1^2}{2} - x_2\right). \qquad (\alpha + \omega)$$

A megoldás szorzatalakban:

$$\overset{*}{f}_3(x_1, x_2) = ce^{\frac{x_1^2}{2} - x_2} . \qquad (\alpha\times\omega)$$

A megoldás hatványalakban.

$$\overset{*}{f}_3(x_1, x_2) = \left(e^{e^{\frac{-x_1^2}{2}}}\right)^{e^{x_2}} , \qquad (\alpha^{\omega})$$

$$\overset{*}{f}_3(x_1, x_2) = \left(e^{e^{x_2}}\right)^{e^{-\frac{x_1^2}{2}}} . \qquad (\omega^{\alpha})$$

Az összeg- és szorzatalakú megoldásokat vizsgálódásaink során meghatározzuk.

A hatványalakú megoldások levezetését a Függelékben közöljük.

A vizsgálódások során külön vizsgáljuk a részleges, azaz az olyan eseteket, amikor csak egy, vagy kettõ a három f_i függvény közül elegendõ a megoldás elõállításához. Általánosságban pedig megköveteljük, hogy mindig, mindhárom egyenlet teljesüljön.

Végül megemlítjük, hogy az az eljárás, miszerint valamely tetszõleges, adott függvényt s-nek tekintve meghatározzuk az f_i, (i = 1,2,3) függvényeket, és ezt követõen vizsgáljuk az f_i függvények kapcsolatát, nem tárgya a jelen tanulmánynak.

3. RÉSZLEGES MEGOLDÁSOK

Részleges megoldások alatt összefoglalóan azt értjük, hogy nem a teljes (2.7-9) egyenletrendszer határozza meg az f_i (i = 1,2,3) függvényeket, hanem annak csak egy része. Ezen belül már a részlegességet többféle szempont szerint értelmezhetjük. Mi négy csoportot különítünk el. Ez elsõbe az a megoldás tartozik, amelyben a három f_i függvény független egymástól, azaz a (2.7-9) egyenletek úgy szeparálódnak, hogy a származtatott egyenletrendszer egyik egyenletében sem szerepel két f_i függvény. A másodikba valamely független változótól független megoldásokat soroljuk. Ez annyit tesz, hogy azok az f_i függvények, amelyeknek a kiválasztott x_i változó szerinti parciális differenciálhányadosa szerepel az egyenletrendszerben, legyenek függetlenek az x_i koordinátától, azaz az x_i koordináta szerint vett parciális differenciálhányadosuk legyen zérus. Ebbe a csoportba soroljuk a két változótól független megoldásokat is. A harmadik csoportot azok a megoldások alkotják, amelyekben úgy szeparálódnak az egyenletek, hogy az egyik f_i függvényre vonatkozó egyenlet(ek) elkülönül(nek) a másik két f_i függvényre vonatkozó egyenlet(ek)tõl. Végül a negyedikbe azt az esetet soroljuk, amikor az $f_2 = x_1 f_3$ összefüggés fennáll; ekkor az egyenletek szerkezete egyszerûsödik. A négy esetet négy pontban vizsgáljuk meg.

3.1. A három független f_i függvény esete

Ahhoz, hogy a (2.7-9) egyenletrendszer három független egyenletrendszerre essen szét, az szükséges, hogy az f_i (i = 1,2,3) függvény minden egyenletben szereplõ minden differenciálkifejezése, illetve összegük, ha több van belõle, önmagában zérus legyen. Ez azt jelenti, hogy az f_1 x_1 és x_2, az $x_3 f_2$ x_2 és x_3 szerinti, valamint az $x_3 f_3$ x_3 szerinti parciális differenciálhányadosa legyen zérus. Ekkor egyrészt az f_1 és f_2 egyaránt egy egyváltozós függvény erejéig határozható meg, az f_3 függvényre pedig felírható egy differenciálegyenlet. A mondottakat részletezni fogjuk.

Az így nyert megoldásokat fogjuk az 1. megoldáscsoportnak, vagy 1. részmegoldásnak nevezni. A megoldást jelölõ F függvény fölötti ^{1} index jelzi, hogy az elsõ megoldáscsoporthoz tartozik a függvény, vagy konstans.

A részmegoldást értelmezõ feltételek:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0\,, \tag{3.1a}$$

$$\frac{\partial x_3 f_2}{\partial x_2} = \frac{\partial x_3 f_2}{\partial x_3} = 0\,, \tag{3.1b}$$

$$\frac{\partial x_3 f_3}{\partial x_3} = 0\,. \tag{3.1c}$$

Mivel az f_1-re, illetve az f_2-re nézve több feltétel fel sem írható, tehát meghatározható a két függvény az (1a), illetve az (1b) egyenletrendszerbõl:

$$f_1 = \overset{0}{F}_3(x_3)\,, \tag{3.2a}$$

$$f_2 = \overset{0}{F}_1(x_1)/x_3\,. \tag{3.2b}$$

A megoldást megadó F függvény fölötti ^{0} index jelzi, hogy az integrálási szabad függvényrõl van szó. A továbbiakban használni fogjuk a nulladik megoldás kifejezést is.

Az (1c) egyenlet alapján az f_3 függvényt a

$$f_3 = f_3(x_1, x_2)/x_3 \tag{3.3}$$

alakban kell keresni. A megoldandó egyenlet (lásd a (2.7) egyenletet):

$$\frac{\partial x_3 f_3}{\partial x_1} + \frac{\partial x_3 f_3}{\partial x_2} x_1 = 0\,. \tag{3.4}$$

A megoldást összeg- és szorzatalakban keressük.

Elsõnek az összegalakú megoldást vizsgáljuk. Legyen

$$f_3(x_1, x_2) = \overset{1}{f}_3(x_1) + \overset{2}{f}_3(x_2)\,. \tag{3.5}$$

Ekkor

$$\frac{d\,\overset{1}{f}_3(x_1)}{dx_1} + \frac{d\,\overset{2}{f}_3(x_2)}{dx_2} x_1 = 0\,. \tag{3.6}$$

Innét

$$\overset{1}{f}_3(x_1) = \overset{1}{C}_1 \frac{x_1^2}{2}\,, \tag{3.7a}$$

$$\overset{2}{f}_3(x_2) = -\overset{1}{C}_1 x_2\,, \tag{3.7b}$$

és mindkét függvényhez járulhat egy-egy konstans, amit összevonunk. Ekkor

$$f_3(x_1, x_2) = \overset{1}{C}_1\left(\frac{x_1^2}{2} - x_2\right) + \overset{0}{C}\,. \tag{3.8}$$

Másodiknak a szorzatalakú megoldást vizsgáljuk. Legyen

$$f_3(x_1,x_2) = \overset{3}{f}_3(x_1)\cdot \overset{4}{f}_3(x_2)\,. \tag{3.9}$$

Ekkor

$$\frac{d\,\overset{3}{f}_3(x_1)}{dx_1}\overset{4}{f}_3(x_2) + \overset{3}{f}_3(x_1)x_1\frac{d\,\overset{4}{f}_3(x_2)}{dx_2} = 0\,. \tag{3.10}$$

Átrendezve

$$-\frac{d\,\overset{4}{f}_3(x_2)}{\overset{4}{f}_3(x_2)dx_2} = \frac{d\,\overset{3}{f}_3(x_1)}{\overset{3}{f}_3(x_1)x_1dx_1} = \lambda\,. \tag{3.11}$$

Innét

$$\overset{3}{f}_3(x_1) = e^{\lambda\frac{x_1^{\,2}}{2}}\,, \tag{3.12a}$$

$$\overset{4}{f}_3(x_2) = e^{-\lambda x_2}\,, \tag{3.12b}$$

azaz

$$f_3(x_1,x_2) = \overset{1}{C}_2\,e^{\frac{x_1^{\,2}}{2}-x_2}\,. \tag{3.13}$$

Összefoglalva, a három független f_i függvény esetén a megoldás az alábbi alakú:

$$f_1(x_1,x_2,x_3) = \overset{0}{F}_3(x_3)\,, \tag{3.14a}$$

$$f_2(x_1,x_2,x_3) = \overset{0}{F}_1(x_1)/x_3\,, \tag{3.14b}$$

$$f_3(x_1,x_2,x_3) = \overset{1}{C}_1\left(\frac{x_1^{\,2}}{2} - x_2\right)/x_3 + \overset{1}{C}_2\,e^{\frac{x_1^{\,2}}{2}-x_2}/x_3 + \overset{0}{C}/x_3\,. \tag{3.14c}$$

Az elsõ megoldáscsoportba beletartozik a nulladik megoldás, valamint két független megoldás. A hozzájuk tartózó együtthatókat az alsó indexek különböztetik meg egymástól.

Ellenõrzés

Az ellenõrzés során a nulladik megoldást vizsgálni nem szükséges. Csak a (2.7), azaz a (4) egyenletet kell vizsgálni. Az x_3-mal már egyszerûsítettünk:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\overset{1}{C}_1\left(\frac{x_1^{\,2}}{2} - x_2\right) + \overset{1}{C}_2\,e^{\frac{x_1^{\,2}}{2}-x_2}\right) + x_1\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\overset{1}{C}_1\left(\frac{x_1^{\,2}}{2} - x_2\right) + \overset{1}{C}_2\,e^{\frac{x_1^{\,2}}{2}-x_2}\right) =$$

$$= \overset{1}{C}_1 x_1 + x_1 \overset{1}{C}_2 e^{\frac{x_1^2}{2} - x_2} + (-1)\overset{1}{C}_1 x_1 + (-1) x_1 \overset{1}{C}_2 e^{\frac{x_1^2}{2} - x_2} = 0. \qquad (3.15)$$

A (4) egyenlet triviálisan teljesül.

3.2. Egy független változótól független megoldások

Mint említettük, csak az egyenletrendszerben szereplõ parciális differenciálhányadosról követeljük meg, hogy váljon zérussá. Ha ezt minden vonatkozó parciális differenciálhányadosról megkövetelnénk, akkor az eltolási szimmetriával generált feladatokhoz jutnánk el.

3.2.1. Az x_1 változótól független megoldás

A részmegoldást értelmezõ feltételek:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0\,, \qquad (3.16a)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} = 0\,, \qquad (3.16b)$$

ami alapján az f_i (i = 1,3) függvényeket az

$$f_1 = f_1(x_2, x_3)\,, \qquad (3.17a)$$

$$f_3 = f_3(x_2, x_3) \qquad (3.17b)$$

alakban kell keresni.

Megjegyzés: mivel az f_2 függvény x_1 szerinti parciális deriváltja nem szerepel a rendszerben, ezért az f_2 függvény elvben függhet az x_1 változótól.

A megoldandó egyenletrendszer:

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(x_3 f_2 - x_1 x_3 f_3) = 0\,, \qquad (3.18a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}(x_3 f_3) = \frac{\partial}{\partial x_2} f_1\,, \qquad (3.18b)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}(x_3 f_2 - x_1 x_3 f_3) = 0\,. \qquad (3.18c)$$

A (18a,c) szerint a $x_3 f_2 - x_1 x_3 f_3$ kifejezés csak x_1-tõl függhet. Azaz

$$f_2 = x_1 f_3 + \overset{0}{F}_1(x_1)/x_3\,. \qquad (3.19)$$

Ekkor megoldandó a (18c) egyenlet:

$$\frac{\partial x_3 f_3}{\partial x_3} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\,. \qquad (3.20)$$

A megoldást összeg- és szorzatalakban keressük.

Tekintsük elsõnek az összegalakú megoldást! Legyen

$$f_1(x_2,x_3) = \overset{1}{f}_1(x_2) + \overset{2}{f}_1(x_3)\,, \tag{3.21a}$$

$$f_3(x_2,x_3) = \overset{1}{f}_3(x_2) + \overset{2}{f}_3(x_3)\,. \tag{3.21b}$$

Ekkor

$$\overset{1}{f}_3(x_2) + \frac{dx_3\,\overset{2}{f}_3(x_3)}{dx_3} = \frac{d\,\overset{1}{f}_1(x_2)}{dx_2}\,. \tag{3.22}$$

A változók szétválasztásával két megoldás nyerhetõ.

Az egyikben a két változó szerint teljesen szétválasztódnak az egyenletek:

$$\overset{2}{f}_3(x_3) = \overset{0}{c}_3/\,x_3\,, \tag{3.23a}$$

$$\overset{1}{f}_3(x_2) = \frac{d\,\overset{1}{f}_1(x_2)}{dx_2}\,. \tag{3.23b}$$

A másikban az egyes kifejezések konstanst adnak:

$$\overset{1}{f}_3(x_2) = \overset{1}{c}_1 - \overset{2}{c}_3\,, \tag{3.24a}$$

$$\overset{2}{f}_3(x_3) = \overset{2}{c}_3\,, \tag{3.24b}$$

$$\overset{1}{f}_1(x_2) = \overset{1}{c}_1\,x_2\,. \tag{3.24c}$$

Tekintsük másodszor a szorzatalakú megoldást! Legyen

$$f_1(x_2,x_3) = \overset{3}{f}_1(x_2)\cdot\overset{4}{f}_1(x_3)\,, \tag{3.25a}$$

$$f_3(x_2,x_3) = \overset{3}{f}_3(x_2)\cdot\overset{4}{f}_3(x_3)\,. \tag{3.25b}$$

Ekkor

$$\overset{3}{f}_3(x_2)\frac{dx_3\,\overset{4}{f}_3(x_3)}{dx_3} = \frac{d\,\overset{3}{f}_1(x_2)}{dx_2}\,\overset{4}{f}_1(x_3)\,. \tag{3.26}$$

Átrendezve

$$\frac{dx_3\,\overset{4}{f}_3(x_3)}{\overset{4}{f}_1(x_3)dx_3} = \frac{d\,\overset{3}{f}_1(x_2)}{\overset{3}{f}_3(x_2)dx_2}\,. \tag{3.27}$$

Innét

$$\overset{4}{f}_1(x_3) = \frac{dx_3\,\overset{4}{f}_3(x_3)}{dx_3}\,, \tag{3.28a}$$

$$\overset{3}{f}_3(x_2) = \frac{d\,\overset{3}{f}_1(x_2)}{dx_2}\,. \tag{3.28b}$$

A kétféle megoldást egy képletben egyesítve:

$$f_1(x_2, x_3) = \overset{1}{f}_1(x_2) + \overset{1}{c}_1\, x_2 + \overset{2}{f}_1(x_3) + \overset{3}{f}_1(x_2)\frac{dx_3\,\overset{4}{f}_3(x_3)}{dx_3}\,, \tag{3.29a}$$

$$f_3(x_2, x_3) = \frac{d\,\overset{1}{f}_1(x_2)}{dx_2} + \overset{1}{c}_1 - \overset{2}{c}_3 + \overset{2}{c}_3 + \overset{0}{c}_3/\, x_3 + \frac{d\,\overset{3}{f}_1(x_2)}{dx_2}\,\overset{4}{f}_3(x_3)\,. \tag{3.29b}$$

A kapott megoldásról megállapítható, hogy az elsõ tag az utolsó tag partikuláris esete, amikor is $\overset{4}{f}_3(x_3) = 1$, valamint a második tag az elsõ tag partikuláris esete, amikor is $\overset{1}{f}_1(x_2) = \overset{1}{c}_1\, x_2$, végül a harmadik tag a nulladik megoldás. (A sorszámozásba az egymást kiejtõ két konstanst nem vettük bele.)

Összefoglalva, az x_1 változótól független függvény esetén a megoldás az alábbi alakú. Itt alkalmazzuk az $\overset{n}{F}_i(x_i) = 0$ jelölést. Jelen esetben a második részmegoldásról beszélünk. A partikuláris megoldásokat nem tüntettük föl.

$$f_1(x_2, x_3) = \overset{2}{F}_2(x_2)\frac{dx_3\,\overset{2}{F}_3(x_3)}{dx_3} + \overset{0}{F}_3(x_3)\,, \tag{3.30a}$$

$$f_2(x_2, x_3) = x_1\frac{d\,\overset{2}{F}_2(x_2)}{dx_2}\,\overset{2}{F}_3(x_3) + \overset{0}{F}_1(x_1)/\, x_3\,, \tag{3.30b}$$

$$f_3(x_1, x_3) = \frac{d\,\overset{2}{F}_2(x_2)}{dx_2}\,\overset{2}{F}_3(x_3) + \overset{0}{C}/\, x_3\,. \tag{3.30c}$$

Elvben az f_2 függvénynél meg kellene jelennie a $\overset{0}{C}\, x_1 /\, x_3$ tagnak, de ez partikuláris esete az $\overset{0}{F}_1(x_1)/\, x_3$ függvénynek, ezért az elõbbit figyelmen kívül hagyjuk.

Ellenõrzés

Az ellenõrzés során csak a 2. részmegoldást elegendõ vizsgálni. Továbbá, mivel fennáll az $f_2 = x_1 f_3$ összefüggés, és sem f_1, sem f_3 nem függ x_1-tõl ezért elegendõ a (2.8), azaz a (20) egyenlet teljesülését leellenõrizni.

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(x_3 \frac{d\overset{2}{F}_2(x_2)}{dx_2}\overset{2}{F}_3(x_3)\right) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\overset{2}{F}_2(x_2)\frac{dx_3\overset{2}{F}_3(x_3)}{dx_3}\right). \tag{3.31}$$

Az azonosság nyilvánvaló

3.2.2. Az x_2 változótól független megoldás

A részmegoldást értelmezõ feltételek:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0, \tag{3.32a}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0, \tag{3.32b}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_2} = 0, \tag{3.32c}$$

ami alapján az f_i (i = 1,2,3) függvényeket az

$$f_1 = f_1(x_1, x_3), \tag{3.33a}$$

$$f_2 = f_2(x_1, x_3), \tag{3.33b}$$

$$f_3 = f_3(x_1, x_3) \tag{3.33c}$$

alakban kell keresni.

Ekkor a megoldandó egyenletrendszer:

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} = 0, \tag{3.34a}$$

$$\frac{\partial x_3 f_3}{\partial x_3} = 0, \tag{3.34b}$$

$$\frac{\partial x_3 f_2}{\partial x_3} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}. \tag{3.34c}$$

A (34a,b) alapján az f_3 függvény a nulladik megoldással egyenlõ.

A (34c) egyenlet megoldását összeg- és szorzatalakban keressük.

Tekintsük elsõnek az összegalakú megoldást! Legyen

$$f_1(x_1, x_3) = \overset{1}{f}_1(x_1) + \overset{2}{f}_1(x_3), \tag{3.35a}$$

$$f_2(x_1, x_3) = \overset{1}{f}_2(x_1) + \overset{2}{f}_2(x_3). \tag{3.35b}$$

Ekkor

$$\overset{1}{f}_2(x_1) + \frac{dx_3\,\overset{2}{f}_2(x_3)}{dx_3} = \frac{d\,\overset{1}{f}_1(x_1)}{dx_1}\,. \tag{3.36}$$

A változók szétválasztásával két megoldás nyerhetõ.

Az egyikben a két változó szerint teljesen szétválasztódnak az egyenletek:

$$\overset{1}{f}_2(x_1) = \frac{d\,\overset{1}{f}_1(x_1)}{dx_1}\,, \tag{3.37a}$$

$$\overset{2}{f}_2(x_3) = \overset{21}{c}_2 / x_3\,. \tag{3.37b}$$

A másikban az egyes kifejezések konstanst adnak:

$$\overset{1}{f}_2(x_1) = \overset{1}{c}_1 - \overset{22}{c}_2\,, \tag{3.38a}$$

$$\overset{2}{f}_2(x_3) = \overset{22}{c}_2\,, \tag{3.38b}$$

$$\overset{1}{f}_1(x_1) = \overset{1}{c}_1\,x_1\,. \tag{3.38c}$$

Tekintsük másodszor a szorzatalakú a megoldást! Legyen

$$f_1(x_1, x_3) = \overset{3}{f}_1(x_1)\cdot \overset{4}{f}_1(x_3)\,, \tag{3.39a}$$

$$f_2(x_1, x_3) = \overset{3}{f}_2(x_1)\cdot \overset{4}{f}_2(x_3)\,. \tag{3.39b}$$

Ekkor

$$\overset{3}{f}_2(x_1)\frac{dx_3\,\overset{4}{f}_2(x_3)}{dx_3} = \frac{d\,\overset{3}{f}_1(x_1)}{dx_1}\,\overset{4}{f}_1(x_3)\,. \tag{3.40}$$

Átrendezve

$$\frac{dx_3\,\overset{4}{f}_2(x_3)}{\overset{4}{f}_1(x_3)\,dx_3} = \frac{d\,\overset{3}{f}_1(x_1)}{\overset{3}{f}_2(x_1)\,dx_1}\,. \tag{3.41}$$

Innét

$$\overset{3}{f}_2(x_1) = \frac{d\,\overset{3}{f}_1(x_1)}{dx_1}\,, \tag{3.42a}$$

$$\overset{4}{f}_1(x_3) = \frac{dx_3\,\overset{4}{f}_2(x_3)}{dx_3}\,, \tag{3.42b}$$

azaz

$$f_1(x_1,x_3)=\overset{3}{f}_1(x_1)\frac{dx_3\,\overset{4}{f}_2(x_3)}{dx_3}\,, \tag{3.43a}$$

$$f_2(x_1,x_3)=\frac{d\,\overset{3}{f}_1(x_1)}{dx_1}\,\overset{4}{f}_2(x_3)\,. \tag{3.43b}$$

A kétféle megoldás egyesítése alapján:

$$f_1(x_1,x_3)=\overset{1}{f}_1(x_1)+\overset{1}{c}_1\,x_1+\overset{2}{f}_1(x_3)+\overset{3}{f}_1(x_1)\frac{dx_3\,\overset{4}{f}_2(x_3)}{dx_3}\,, \tag{3.44a}$$

$$f_2(x_1,x_3)=\frac{d\,\overset{1}{f}_1(x_1)}{dx_1}+\overset{1}{c}_2-\overset{22}{c}_2+\overset{22}{c}_2+\overset{21}{c}_2/\,x_3+\frac{d\,\overset{3}{f}_1(x_1)}{dx_1}\,\overset{4}{f}_2(x_3)\,. \tag{3.44b}$$

A kapott megoldásról megállapítható, hogy annak az elsõ tagja az kétargumentumú megoldás partikuláris esete, amikor is $\overset{4}{f}_2(x_3)=1$, valamint a második tagja az elsõ tag partikuláris esete, amikor is $\overset{1}{f}_1(x_1)=\overset{1}{c}_1\,x_1$, végül a harmadik tag, a nulladik megoldás, illetve annak egy partikuláris megoldása. (A sorszámozásba az egymást kiejtõ két konstanst nem vettük bele.)

Összefoglalva, az x_2 függvénytõl független megoldás az alábbi alakú. Itt is alkalmazzuk az $\overset{n}{F}_i(x_i)$ jelölést. Jelen esetben a harmadik részmegoldásról beszélünk. A partikuláris megoldásokat nem tüntettük föl.

$$f_1(x_1,x_3)=\overset{3}{F}_1(x_1)\frac{dx_3\,\overset{3}{F}_3(x_3)}{dx_3}+\overset{0}{F}_3(x_3)\,, \tag{3.45a}$$

$$f_2(x_1,x_3)=\frac{d\,\overset{3}{F}_1(x_1)}{dx_1}\,\overset{3}{F}_3(x_3)\,, \tag{3.45b}$$

$$f_3(x_1,x_3)=\overset{0}{C}/\,x_3\,. \tag{3.45c}$$

Megjegyezzük, hogy f_2 burkoltan tartalmazza a nulladik megoldást, amennyiben az $\overset{3}{F}_3(x_3)=1/\,x_3$ választással élünk. (Ekkor f_1 is csak a nulladik megoldással egyenlõ.)

Ellenõrzés

Az ellenõrzés során elegendõ csak a 3. részmegoldást vizsgálni. Továbbá, mivel mindhárom f_i függvény független x_2-tõl, valamint az f_3 a nulladik megoldással egyenlõ, azért elegendõ a (2.9), azaz a (34c) egyenlet teljesülését leellenõrizni.

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(x_3 \frac{d\,\overset{3}{F}_1(x_1)}{dx_1} \overset{3}{F}_3(x_3) \right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\overset{3}{F}_1(x_1) \frac{dx_3\,\overset{3}{F}_3(x_3)}{dx_3} \right). \tag{3.46}$$

Az azonosság nyilvánvaló

3.2.3. Az x_3 változótól független megoldás

A részmegoldást értelmezõ feltételek:

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 0\,, \tag{3.47a}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_3} = 0\,, \tag{3.47b}$$

ami alapján az f_i (i = 1,2,3) függvényeket az

$$f_2 = f_2(x_1, x_2)\,, \tag{3.48a}$$

$$f_3 = f_3(x_1, x_2) \tag{3.48b}$$

alakban kell keresni.

Ekkor a megoldandó egyenletrendszer:

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} - x_1 \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\,, \tag{3.49a}$$

$$f_3 = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\,, \tag{3.49b}$$

$$f_2 - x_1 f_3 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\,. \tag{3.49c}$$

A (49b,c) alapján az f_1 függvény két részbõl áll, az egyik csak x_1 és x_2 függvénye lehet, a másik x_3 függvénye. Azaz (48b,c) kiegészíthetõ a következõ összefüggéssel.

$$f_1 = f_1(x_1, x_2) + \overset{0}{F}_3(x_3)\,. \tag{3.50}$$

A (49) egyenletrendszernek háromféle általános megoldása állítható elõ.

Amennyiben adottnak tekintjük az f_1 függvény, úgy f_2 és f_3 egyértelmûen meghatározható a (49b,c) összefüggésekbõl. Továbbá, ha ezeket az összefüggéseket behelyettesítjük (49a)-ba, akkor azonosságot kapunk (f_1 x_1 és x_2 szerinti vegyes deriváltjait a kétféle sorrendben.) Ezt tekintjük a 4. megoldás alapváltozatának.

A (49b,c) szerint a kétváltozós f_1 függvény egyértelmûen meghatározható, ha az integrálhatósági feltételek teljesülnek. Az említett két függvényre az integrálhatósági feltétel éppen a (49a) összefüggés. Tehát jelen esetben egy egyenletünk van az f_2 és f_3 meghatározására, majd amazok ismertében (49b,c) alapján f_1 egyértelmûen meghatározható. Ezt tekintjük az 4. megoldás elsõ partikuláris változatának.

Végzetül ennek fordítottját is alkalmazhatjuk, amennyiben a (49c) egyenletbõl küszöböljük ki a f_3 függvényt és ekkor egy egyenletünk lesz a f_1, f_2 függvénypárosra, majd f_3-at (49b)-bõl határozzuk meg. Megjegyezzük, hogy (49b)-t (49a)-ba helyettesítve éppen a megoldandó egyenletet kapjuk vissza (pontosabban annak x_2 szerinti parciális differenciálját, de ez így van rendjén, mert f_3 (49b)-bõl egy, az x_1-tól függõ függvény erejéig határozható meg egyértelmûen). Ezt tekintjük a 4. megoldás második partikuláris változatának.

Külön-külön vizsgáljuk meg az egyes lehetséges megoldásokat.

Elsõ eset

A megoldás menetét felvázoltuk fentebb, az összefüggések.

$$f_1 = \overset{4}{F}_{12}(x_1, x_2) + \overset{0}{F}_3(x_3)\,, \tag{3.51a}$$

$$f_2 = \frac{\partial \overset{4}{F}_{12}(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial \overset{4}{F}_{12}(x_1, x_2)}{\partial x_2} x_1\,, \tag{3.51b}$$

$$f_3 = \frac{\partial \overset{4}{F}_{12}(x_1, x_2)}{\partial x_2}\,. \tag{3.51c}$$

Ellenõrzés

A (2.7) egyenlet esetében az x_3-mal egyszerûsíthetünk (lásd a (49a) egyenletet):

$$(2.7) \qquad \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial \overset{4}{F}_{12}(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial \overset{4}{F}_{12}(x_1, x_2)}{\partial x_2} x_1 - x_1 \frac{\partial \overset{4}{F}_{12}(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial \overset{4}{F}_{12}(x_1, x_2)}{\partial x_2}\,, \tag{3.52}$$

ami teljesül

A (2.8) egyenlet triviálisan teljesül, mivel az az f_3 értelmezõ egyenlete.

Végül a (2.9), az x_3-tõl való függetlenség miatt elegendõ a (49c) egyenletet vizsgálni:

$$(3.49c) \qquad \frac{\partial \overset{4}{F}_{12}(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial \overset{4}{F}_{12}(x_1, x_2)}{\partial x_2} x_1 - x_1 \frac{\partial \overset{4}{F}_{12}(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \frac{\partial \overset{4}{F}_{12}(x_1, x_2)}{\partial x_1}\,, \tag{3.53}$$

ami teljesül.

Második eset

A megoldást összeg- és szorzatalakban keressük.

Tekintsük a megoldást összeg alakjában! Legyen

$$f_2(x_1,x_2) = \overset{1}{f}_2(x_1) + \overset{2}{f}_2(x_2)\,, \tag{3.54a}$$

$$f_3(x_1,x_2) = \overset{1}{f}_3(x_1) + \overset{2}{f}_3(x_2)\,. \tag{3.54b}$$

Ekkor, (49a) alapján,

$$\frac{d\,\overset{2}{f}_2(x_2)}{dx_2} = \frac{d\,\overset{1}{f}_3(x_1)}{dx_1} + \frac{d\,\overset{2}{f}_3(x_2)}{dx_2}\,x_1\,. \tag{3.55}$$

Az egyenletet a változók szétválasztásával oldjuk meg. Két esetet kell megkülönböztetni: a konstansra és az x_1-tõl függõ egyenletre vezetõ megoldásokat.

A konstans esete. Ha

$$\overset{2}{f}_2(x_2) = \overset{21}{c}_2\,x_2 + \overset{0}{c}_2\,, \tag{3.56a}$$

$$\overset{1}{f}_3(x_1) = \overset{21}{c}_2\,x_1 + \overset{10}{c}_3\,, \tag{3.56b}$$

és

$$\overset{2}{f}_3(x_2) = 0\,, \tag{3.56c}$$

akkor (55) teljesül.

A x_1-tõl függõ egyenletre vezetõ eset. Ha

$$\overset{2}{f}_2(x_2) = \overset{22}{c}_2\,x_2 + \overset{0}{c}_2\,, \tag{3.57a}$$

és

$$\overset{2}{f}_3(x_2) = -\overset{2}{c}_3\,x_2 + \overset{0}{c}_3\,, \tag{3.57b}$$

akkor

$$\overset{22}{c}_2 = \frac{d\,\overset{1}{f}_3(x_1)}{dx_1} - \overset{2}{c}_3\,x_1\,, \tag{3.58}$$

amelynek a megoldása

$$\overset{1}{f}_3(x_1) = \overset{2}{c}_3\,\frac{x_1^{\,2}}{2} + \overset{22}{c}_2\,x_1 + \overset{20}{c}_3\,. \tag{3.59}$$

Az összegalakban elõállított megoldás, amelyben a $\overset{21}{c}_2 + \overset{22}{c}_2$, illetve a $\overset{10}{c}_3 + \overset{20}{c}_3$ együtthatókat összevontuk $\overset{2}{c}_2$-vé, illetve $\overset{0}{c}_3$-vá.

$$f_2(x_1,x_2) = \overset{1}{f}_2(x_1) + \overset{2}{c}_2\, x_2 + \overset{0}{c}_2\,, \tag{3.60a}$$

$$f_3(x_1,x_2) = \overset{2}{c}_3\left(\frac{x_1^{\,2}}{2} - x_2\right) + \overset{2}{c}_2\, x_1 + \overset{0}{c}_3\,. \tag{3.60b}$$

Az ehhez tartózó f_1 függvény értéke a kétféle integrálból, lásd a (49b,c) összefüggéseket:

(49b)
$$\begin{aligned} f_1(2) &= \int f_3 dx_2 = \int \overset{2}{c}_3\left(\frac{x_1^{\,2}}{2} - x_2\right) + \overset{2}{c}_2\, x_1 + \overset{0}{c}_3 dx_2 = \\ &= \overset{2}{c}_3\left(\frac{x_1^{\,2}}{2}x_2 - \frac{x_2^{\,2}}{2}\right) + \overset{2}{c}_2\, x_1 x_2 + \overset{0}{c}_3\, x_2 \; (+\tilde{f}_1(x_1)), \end{aligned} \tag{3.61a}$$

(49c)
$$\begin{aligned} f_1(1) &= \int f_2 - x_1 f_3 dx_1 = \int \overset{1}{f}_2(x_1)dx_1 + \int \overset{2}{c}_2\, x_2 + \overset{0}{c}_2 - x_1\left(\overset{2}{c}_3\left(\frac{x_1^{\,2}}{2} - x_2\right) + \overset{2}{c}_2\, x_1 + \overset{0}{c}_3\right)dx_1 = \\ &= \int \overset{1}{f}_2(x_1)dx_1 + \overset{2}{c}_2\, x_1 x_2 + \overset{0}{c}_2\, x_1 - \overset{2}{c}_3\left(\frac{x_1^{\,4}}{8} - \frac{x_1^{\,2}}{2}x_2\right) - \overset{2}{c}_2\frac{x_1^{\,3}}{3} - \overset{0}{c}_3\frac{x_1^{\,2}}{2} \; (+\tilde{f}_1(x_2)). \end{aligned} \tag{3.61b}$$

Megjegyezzük, hogy az egyes, zárójelben feltüntetett integrálási szabad függvények szerepe azonos azzal, amit az s függvénynél ismertettünk.

Bevezetve az

$$\overset{1}{f}_1(x_1) = \int \overset{1}{f}_2(x_1)dx_1 \tag{3.62}$$

jelölést, az f_1 függvényre kapjuk

$$f_1 = \overset{1}{f}_1(x_1) - \overset{2}{c}_3\left(\frac{x_1^{\,4}}{8} - \frac{x_1^{\,2}}{2}x_2 + \frac{x_2^{\,2}}{2}\right) - \overset{2}{c}_2\, x_1\left(\frac{x_1^{\,2}}{3} - x_2\right) + \overset{0}{c}_2\, x_1 - \overset{0}{c}_3\left(\frac{x_1^{\,2}}{2} - x_2\right). \tag{3.63}$$

Megjegyezzük azt is, hogy f_2-ben az (62) alatti függvény x_1 szerinti differenciálja jelenik majd meg.

Tekintsük a megoldást szorzat alakjában! Legyen

$$f_2(x_1,x_2) = \overset{3}{f}_2(x_1)\cdot \overset{4}{f}_2(x_2)\,, \tag{3.64a}$$

$$f_3(x_1,x_2) = \overset{3}{f}_3(x_1)\cdot \overset{4}{f}_3(x_2)\,. \tag{3.64b}$$

Ekkor (49a) alapján a megoldandó egyenlet

$$\overset{3}{f}_2(x_1)\frac{d\,\overset{4}{f}_2(x_2)}{dx_2} = \frac{d\,\overset{3}{f}_3(x_1)}{dx_1}\,\overset{4}{f}_3(x_2) + x_1\,\overset{3}{f}_3(x_1)\frac{d\,\overset{4}{f}_3(x_2)}{dx_2}\,. \tag{3.65}$$

Az egyenletet az argumentumok szétválasztásával oldjuk meg. Kétféle feltevés tehetünk.

Elõször az x_2-öt tartalmazó függvényekre teszünk feltevés. Legyen

$$\frac{d\,\overset{41}{f}_2(x_2)}{dx_2} = \frac{d\,\overset{41}{f}_3(x_2)}{dx_2} = \overset{41}{f}_3(x_2)\,. \tag{3.66}$$

Az $\overset{41}{f}_3$ függvényre vonatkozó differenciálegyenletet megoldva

$$\overset{41}{f}_3(x_2) = \overset{41}{c}_3\, e^{x_2}\,, \tag{3.67}$$

következésképpen

$$\overset{41}{f}_2(x_2) = \overset{41}{c}_3\, e^{x_2}\,. \tag{3.68}$$

Ez esetben

$$\overset{31}{f}_2(x_1) = x_1\, \overset{31}{f}_3(x_1) + \frac{d\,\overset{31}{f}_3(x_1)}{dx_1}\,. \tag{3.69}$$

Másodszor az x_1-et tartalmazó függvényekre teszünk feltevést. Legyen

$$\overset{32}{f}_2(x_1) = x_1\, \overset{32}{f}_3(x_1) = \frac{d\,\overset{32}{f}_3(x_1)}{dx_1}\,. \tag{3.70}$$

Az $\overset{32}{f}_3$ függvényre vonatkozó differenciálegyenletet megoldva

$$\overset{32}{f}_3(x_1) = \overset{32}{c}_3\, e^{\frac{x_1^2}{2}}\,, \tag{3.71}$$

következésképpen

$$\overset{32}{f}_2(x_1) = \overset{32}{c}_3\, x_1 e^{\frac{x_1^2}{2}}\,. \tag{3.72}$$

Ez esetben

$$\overset{42}{f}_3(x_2) + \frac{d\,\overset{42}{f}_3(x_2)}{dx_2} = \frac{d\,\overset{42}{f}_2(x_2)}{dx_2}\,. \tag{3.73}$$

A (73) egyenlet az $\overset{42}{f}_3$-re nézve az alábbi közönséges differenciálegyenletnek felel meg:

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x)\,. \tag{3.74}$$

Ennek a megoldását a

$$\mathrm{m}(x) = e^{\int a(x)dx} \tag{3.75}$$

integráló szorzó alkalmazásával az

$$y(x) = \frac{1}{\mathrm{m}(x)}\left(\int f(x)\mathrm{m}(x)dx + C\right) \tag{3.76}$$

alakban állíthatjuk elõ.

Következésképpen a (73), mint differenciálegyenlet megoldható, és az egyenletben szereplõ két függvény között egyértelmû kapcsolat az alábbi összefüggés szerint adható meg

$$\overset{42}{f}_3(x_2) = \frac{1}{e^{x_2}}\left(\int \frac{d\overset{42}{f}_2(x_2)}{dx_2} e^{x_2} dx_2 + \overset{42}{c}_3\right). \tag{3.77}$$

A szorzatalakban nyert megoldás az alábbi alakban foglalható össze.

$$f_2(x_1,x_2) = \left(\overset{31}{f}_3(x_1)x_1 + \frac{d\overset{31}{f}_3(x_1)}{dx_1}\right)\overset{41}{c}_3 e^{x_2} + \overset{32}{c}_3 x_1 e^{\frac{x_1^2}{2}} \overset{42}{f}_2(x_2), \tag{3.78a}$$

$$f_3(x_1,x_2) = \overset{31}{f}_3(x_1)\overset{41}{c}_3 e^{x_2} + \overset{32}{c}_3 e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}\int \frac{d\overset{42}{f}_2(x_2)}{dx_2}e^{x_2}dx_2 + \overset{32}{c}_3\overset{42}{c}_3 e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}. \tag{3.78b}$$

Az ehhez tartózó f_1 függvény értéke

(49b) alapján

$$\begin{aligned} f_1(2) &= \int f_3 dx_2 = \int\left(\overset{31}{f}_3(x_1)\overset{41}{c}_3 e^{x_2} + \overset{32}{c}_3 e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}\int \frac{d\overset{42}{f}_2(x_2)}{dx_2}e^{x_2}dx_2 + \overset{32}{c}_3\overset{42}{c}_3 e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}\right)dx_2 = \\ &= \overset{31}{f}_3(x_1)\overset{41}{c}_3 e^{x_2} + \overset{32}{c}_3 e^{\frac{x_1^2}{2}}\int e^{-x_2}\int \frac{d\overset{42}{f}_2(x_2)}{dx_2}e^{x_2}dx_2dx_2 - \overset{32}{c}_3\overset{42}{c}_3 e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}. \end{aligned} \tag{3.79a}$$

(49c) alapján

$$f_1(1) = \int f_2 - x_1 f_3 dx_1 = \int\left(\overset{31}{f}_3(x_1)x_1 + \frac{d\overset{31}{f}_3(x_1)}{dx_1}\right)\overset{41}{c}_3 e^{x_2} + \overset{32}{c}_3 x_1 e^{\frac{x_1^2}{2}}\overset{42}{f}_2(x_2) - \tag{3.79b}$$

$$-\int x_1\left(\overset{31}{f}_3(x_1)\overset{41}{c}_3 e^{x_2} + \overset{32}{c}_3 e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}\int \frac{d\overset{42}{f}_2(x_2)}{dx_2}e^{x_2}dx_2 + \overset{32}{c}_3\overset{42}{c}_3 e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}\right)dx_1 -$$

$$= \left(\int \overset{31}{f}_3(x_1)x_1dx_1 + \overset{31}{f}_3(x_1)\right)\overset{41}{c}_3 e^{x_2} + \overset{32}{c}_3 e^{\frac{x_1^2}{2}}\overset{42}{f}_2(x_2) -$$

$$-\int \overset{31}{f}_3(x_1)x_1dx_1\overset{41}{c}_3e^{x_2}-\overset{32}{c}_3e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}\int\frac{d\overset{42}{f}_2(x_2)}{dx_2}e^{x_2}dx_2-\overset{32}{c}_3\overset{42}{c}_3e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}.$$

Az f_1 függvény két alakja látszólag nem egyforma. Valójában egyforma. Azt kell megmutatni, hogy az

$$\int\left(\frac{1}{e^{x_2}}\int\frac{d\overset{42}{f}_2(x_2)}{dx_2}e^{x_2}dx_2\right)dx_2=\overset{42}{f}_2(x_2)-\frac{1}{e^{x_2}}\int\frac{d\overset{42}{f}_2(x_2)}{dx_2}e^{x_2}dx_2 \tag{3.80}$$

egyenlõség teljesül. Ezt a parciális integrálás segítségével látjuk be.

Az egyik „trükk" a bizonyításban, hogy az $\int\frac{d\overset{42}{f}_2(x_2)}{dx_2}e^{x_2}dx_2$ mennyiséget kell u-nak venni, majd a differenciáláskor eltûnik az integrál. A másik „trükk", hogy a v'-nek választott $\frac{1}{e^{x_2}}$ – az elõjeltõl eltekintve –, egyben a v is.

Az alapösszefüggésünk tehát

$$\int uv'dx=uv-\int u'vdx\,. \tag{3.81}$$

Ekkor

$$\begin{aligned}&\int\left(\frac{1}{e^{x_2}}\int\frac{d\overset{42}{f}_2(x_2)}{dx_2}e^{x_2}dx_2\right)dx_2=\\&=\left(\int\frac{d\overset{42}{f}_2(x_2)}{dx_2}e^{x_2}dx_2\right)\cdot\left(-\frac{1}{e^{x_2}}\right)-\int\left(\frac{d\overset{42}{f}_2(x_2)}{dx_2}e^{x_2}\right)\left(-\frac{1}{e^{x_2}}\right)dx_2=\\&=-\frac{1}{e^{x_2}}\int\frac{d\overset{42}{f}_2(x_2)}{dx_2}e^{x_2}dx_2+\int\frac{d\overset{42}{f}_2(x_2)}{dx_2}dx_2=\overset{42}{f}_2(x_2)-\frac{1}{e^{x_2}}\int\frac{d\overset{42}{f}_2(x_2)}{dx_2}e^{x_2}dx_2,\end{aligned} \tag{3.82}$$

amit bizonyítani kellett.

Megjegyezzük, hogy ez az eredmény egyenértékû azzal, hogy egy függvény a deriváltjából az exp(–x)•.exp(x)dx transzformáció segítségével egyértelmûen elõállítható.

$$f(x)=\frac{1}{e^{x}}\int\frac{df(x)}{dx}e^{x}dx+\int\left(\frac{1}{e^{x}}\int\frac{df(x)}{dx}e^{x}dx\right)dx\,. \tag{3.83}$$

Ezután felírható az f_1 függvény végsõ alakja:

$$f_1=\overset{31}{f}_3(x_1)\overset{41}{c}_3e^{x_2}+\overset{32}{c}_3e^{\frac{x_1^2}{2}}\overset{42}{f}_2(x_2)-\overset{32}{c}_3e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}\int\frac{d\overset{42}{f}_2(x_2)}{dx_2}e^{x_2}dx_2-\overset{32}{c}_3\overset{42}{c}_3e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}. \tag{3.84}$$

A nyert megoldás az alábbi alakban foglalható össze. A negyedik részmegoldásnak megfelelõen a felsõ index 4, az egyes csoportokat a 4 után tett számmal jelöljük.

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1,x_2) = &-\overset{4}{C}_1\left(\frac{x_1^4}{8}-\frac{x_1^2}{2}x_2+\frac{x_2^2}{2}\right)-\overset{4}{C}_2\, x_1\left(\frac{x_1^2}{3}-x_2\right)+\overset{4}{C}_3\, x_1-\overset{4}{C}_4\left(\frac{x_1^2}{2}-x_2\right)+\\
&+\overset{40}{F}_1(x_1)+\overset{41}{F}_1(x_1)e^{x_2}+e^{\frac{x_1^2}{2}}\overset{42}{F}_2(x_2)-e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}\int\frac{d\overset{42}{F}_2(x_2)}{dx_2}e^{x_2}dx_2-\overset{4}{C}_5\, e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2},
\end{aligned}
\tag{3.85a}
$$

$$
f_2(x_1,x_2)=\overset{4}{C}_2\, x_2+\overset{4}{C}_3+\frac{d\overset{40}{F}_1(x_1)}{dx_1}+\left(\overset{41}{F}_1(x_1)x_1+\frac{d\overset{41}{F}_1(x_1)}{dx_1}\right)e^{x_2}+x_1e^{\frac{x_1^2}{2}}\overset{42}{F}_2(x_2)\,, \tag{3.85b}
$$

$$
f_3(x_1,x_2)=\overset{4}{C}_1\left(\frac{x_1^2}{2}-x_2\right)+\overset{4}{C}_2\, x_1+\overset{4}{C}_4+\overset{41}{F}_1(x_1)e^{x_2}+e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}\int\frac{d\overset{42}{F}_2(x_2)}{dx_2}e^{x_2}dx_2+\overset{4}{C}_5\, e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}\,. \tag{3.85c}
$$

Ellenõrzés

Elsõnek a (2.7), azaz a (49a) egyenletet ellenõrizünk, a háromféle függvények megfelelõen három részben. A polinomokra vonatkozóan az ellenõrzés triviális. A csak az exponenciális függvények esete (f_2-re rendezve):

$$
\frac{\partial\left(x_1\overset{41}{F}_1(x_1)+\dfrac{d\overset{41}{F}_1(x_1)}{dx_1}\right)e^{x_2}}{\partial x_2}=\frac{\partial\overset{41}{F}_1(x_1)e^{x_2}}{\partial x_1}+\frac{\partial\overset{4}{C}_5\, e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}}{\partial x_1}+x_1\frac{\partial\overset{41}{F}_1(x_1)e^{x_2}}{\partial x_2}+x_1\frac{\partial\overset{4}{C}_5\, e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}}{\partial x_2}\,. \tag{3.86a}
$$

Az azonosság nyilvánvaló.

Az integráltranszformált függvények esete:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x_1e^{\frac{x_1^2}{2}}\overset{42}{F}_2(x_2)}{\partial x_2}&=\frac{\partial e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}\int\dfrac{d\overset{42}{F}_2(x_2)}{dx_2}e^{x_2}dx_2}{\partial x_1}+x_1\frac{\partial e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}\int\dfrac{d\overset{42}{F}_2(x_2)}{dx_2}e^{x_2}dx_2}{\partial x_2}=\\
&=x_1e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}\int\frac{d\overset{42}{F}_2(x_2)}{dx_2}e^{x_2}dx_2+x_1(-1)e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}\int\frac{d\overset{42}{F}_2(x_2)}{dx_2}e^{x_2}dx_2+x_1e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}\frac{d\overset{42}{F}_2(x_2)}{dx_2}e^{x_2}.
\end{aligned}
\tag{3.86b}
$$

Ez az azonosság is nyilvánvaló.

Másodiknak a (2.8), azaz a (49b) egyenletet tekintjük.

$$
\begin{aligned}
&\overset{4}{C}_1\left(\frac{x_1^2}{2}-x_2\right)+\overset{4}{C}_2\, x_1+\overset{4}{C}_4+\overset{41}{F}_1(x_1)e^{x_2}+e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}\int\frac{d\overset{42}{F}_2(x_2)}{dx_2}e^{x_2}dx_2+\overset{4}{C}_5\, e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}=\\
&=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(-\overset{4}{C}_1\left(\frac{x_1^4}{8}-\frac{x_1^2}{2}x_2+\frac{x_2^2}{2}\right)-\overset{4}{C}_2\, x_1\left(\frac{x_1^2}{3}-x_2\right)+\overset{4}{C}_3\, x_1-\overset{4}{C}_4\left(\frac{x_1^2}{2}-x_2\right)\right)+
\end{aligned}
\tag{3.87}
$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\overset{40}{F_1}(x_1)+\overset{41}{F_1}(x_1)e^{x_2}+e^{\frac{x_1^2}{2}}\overset{42}{F_1}(x_2)-e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}\int\frac{d\overset{42}{F_2}(x_2)}{dx_2}e^{x_2}dx_2-\overset{4}{C_5}e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}\right)$$

Az azonosság fennáll, mivel

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(e^{\frac{x_1^2}{2}}\overset{42}{F_2}(x_2)-e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}\int\frac{d\overset{42}{F_2}(x_2)}{dx_2}e^{x_2}dx_2\right)=e^{\frac{x_1^2}{2}}\frac{d\overset{42}{F_2}(x_2)}{dx_2}+\\+e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}\int\frac{d\overset{42}{F_2}(x_2)}{dx_2}e^{x_2}dx_2-e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}\frac{d\overset{42}{F_2}(x_2)}{dx_2}e^{x_2}=e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}\int\frac{d\overset{42}{F_2}(x_2)}{dx_2}e^{x_2}dx_2.\end{gathered}\tag{3.88}$$

Végül a (2.9), azaz a (49c) egyenletet tekintjük.

$$\begin{gathered}\overset{4}{C_2}x_2+\overset{4}{C_3}+\frac{d\overset{40}{F_1}(x_1)}{dx_1}+\left(\overset{41}{F_1}(x_1)x_1+\frac{d\overset{41}{F_1}(x_1)}{dx_1}\right)e^{x_2}+x_1e^{\frac{x_1^2}{2}}\overset{42}{F_2}(x_2)-\\-x_1\left(\overset{4}{C_1}\left(\frac{x_1^2}{2}-x_2\right)+\overset{4}{C_2}x_1+\overset{4}{C_4}+\overset{41}{F_1}(x_1)e^{x_2}+e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}\int\frac{d\overset{42}{F_2}(x_2)}{dx_2}e^{x_2}dx_2+\overset{4}{C_5}e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}\right)=\\=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\overset{4}{C_1}\left(\frac{x_1^4}{8}-\frac{x_1^2}{2}x_2+\frac{x_2^2}{2}\right)-\overset{4}{C_2}x_1\left(\frac{x_1^2}{3}-x_2\right)+\overset{4}{C_3}x_1-\overset{4}{C_4}\left(\frac{x_1^2}{2}-x_2\right)\right)+\\+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\overset{40}{F_1}(x_1)+\overset{41}{F_1}(x_1)e^{x_2}+e^{\frac{x_1^2}{2}}\overset{42}{F_1}(x_2)-e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}\int\frac{d\overset{42}{F_2}(x_2)}{dx_2}e^{x_2}dx_2-\overset{4}{C_5}e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}\right),\end{gathered}\tag{3.89}$$

ami triviálisan teljesül.

A (49a) egyenletet azzal a feltevéssel oldottuk meg, hogy mindkét benne szereplõ függvény a (47) feltétel miatt (48) alakba írható. A (49a) egyenletnek léteznek ettõl eltérõ megoldásai is, amennyiben más, további feltételt társítunk a (47) feltételekhez. Ezek a további feltételek a (49a) egyenletben szereplõ három kifejezésnek egyenként a nullával való megegyezése. A továbbiakban ezt a lehetséges három esetet tekintjük át.

Az elsõ kiegészítõ feltétel

$$\frac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_2}=0.\tag{3.90}$$

Ekkor a megoldandó egyenletrendszer:

$$\frac{\partial f_3(x_1,x_2)}{\partial x_1}+x_1\frac{\partial f_3(x_1,x_2)}{\partial x_2}=0,\tag{3.91a}$$

$$\frac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_2}=0\,. \tag{3.91b}$$

Az elsõ egyenlet, amely azonos a (4) egyenlettel, megoldását (8) és (13) alapján írjuk föl, a másodikat integráljuk:

$$f_3(x_1,x_2)=\overset{1}{C}_1\left(\frac{x_1^{\,2}}{2}-x_2\right)+\overset{1}{C}_2\,e^{\frac{x_1^{\,2}}{2}-x_2}+\overset{0}{C}\,, \tag{3.92a}$$

$$f_2(x_1,x_2)=\overset{1}{f}_2(x_1)\,. \tag{3.92b}$$

Ezek a függvények már szerepelnek a (85) alatti megoldásban, ezért figyelmen kívül hagyhatók.

A második kiegészítõ feltétel

$$\frac{\partial f_3(x_1,x_2)}{\partial x_2}=0\,. \tag{3.93}$$

Ekkor a megoldandó egyenletrendszer:

$$\frac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_2}=\frac{\partial f_3(x_1,x_2)}{\partial x_1}\,, \tag{3.94a}$$

$$\frac{\partial f_3(x_1,x_2)}{\partial x_2}=0\,. \tag{3.94b}$$

A megoldás közvetlenül felírható

$$f_2(x_1,x_2)=\frac{d\,\overset{43}{F}_1(x_1)}{dx_1}\,x_2+\frac{d\,\overset{40}{F}_1(x_1)}{dx_1}\,, \tag{3.95a}$$

$$f_3(x_1,x_2)=\overset{43}{F}_1(x_1)\,. \tag{3.95b}$$

(95) alapján meghatározzuk f_1-et (49b) és (49c) összefüggésekbõl.

$$f_1(2)=\int\overset{43}{F}_1(x_1)dx_2=\overset{43}{F}_1(x_1)x_2\,, \tag{3.96a}$$

$$f_1(1)=\int\left(\frac{d\,\overset{43}{F}_1(x_1)}{dx_1}\,x_2+\frac{d\,\overset{40}{F}_1(x_1)}{dx_1}-\overset{43}{F}_1(x_1)x_1\right)dx_1=\overset{43}{F}_1(x_1)x_2+\overset{40}{F}_1(x_1)-\int\overset{43}{F}_1(x_1)x_1dx_1\,, \tag{3.96b}$$

ahonnét

$$f_1(x_1,x_2)=\overset{40}{F}_1(x_1)+\overset{43}{F}_1(x_1)x_2-\int\overset{43}{F}_1(x_1)x_1dx_1\,. \tag{3.97}$$

A harmadik kiegészítõ feltétel

$$\frac{\partial f_3(x_1,x_2)}{\partial x_1}=0\,. \tag{3.98}$$

Ekkor a megoldandó egyenletrendszer:

$$\frac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_2}=\frac{\partial f_3(x_1,x_2)}{\partial x_2}x_1\,, \tag{3.99a}$$

$$\frac{\partial f_3(x_1,x_2)}{\partial x_1}=0\,. \tag{3.99b}$$

A megoldás közvetlenül felírható

$$f_2(x_1,x_2)=\overset{44}{F}_2(x_2)x_1+\frac{d\,\overset{40}{F}_1(x_1)}{dx_1}\,, \tag{3.100a}$$

$$f_3(x_1,x_2)=\overset{44}{F}_2(x_2)\,. \tag{3.100b}$$

(100) alapján meghatározzuk f_1-et (49b) és (49c) összefüggésekbõl.

$$f_1(2)=\int\overset{44}{F}_2(x_2)dx_2\,, \tag{3.101a}$$

$$f_1(1)=\int\left(\overset{44}{F}_2(x_2)x_1+\frac{d\,\overset{40}{F}_1(x_1)}{dx_1}x_2-x_1\overset{44}{F}_2(x_2)\right)dx_1=\overset{40}{F}_1(x_1)\,, \tag{3.101b}$$

ami alapján f_1

$$f_1(x_1,x_2)=\int\overset{44}{F}_2(x_2)dx_2+\overset{40}{F}_1(x_1)\,. \tag{3.102}$$

A második és a harmadik kiegészítõ feltétellel nyert részmegoldások esetében is ellenõrizni szükséges a (2.7-9) egyenletrendszer teljesülését. Mivel az ellenõrzés triviális, ezért mellõzzük.

A két független egyedi megoldás figyelembevételével a (49) egyenletrendszer teljes megoldása:

$$\begin{aligned}f_1(x_1,x_2)=&-\overset{4}{C}_1\left(\frac{x_1^{\,4}}{8}-\frac{x_1^{\,2}}{2}x_2+\frac{x_2^{\,2}}{2}\right)-\overset{4}{C}_2\,x_1\left(\frac{x_1^{\,2}}{3}-x_2\right)+\overset{4}{C}_3\,x_1-\overset{4}{C}_4\left(\frac{x_1^{\,2}}{2}-x_2\right)+\\&+\overset{40}{F}_1(x_1)+\overset{41}{F}_1(x_1)e^{x_2}+e^{\frac{x_1^{\,2}}{2}}\overset{42}{F}_2(x_2)-e^{\frac{x_1^{\,2}}{2}-x_2}\int\frac{d\,\overset{42}{F}_2(x_2)}{dx_2}e^{x_2}dx_2-\overset{4}{C}_5\,e^{\frac{x_1^{\,2}}{2}-x_2}+\\&+\overset{43}{F}_1(x_1)x_2-\int\overset{43}{F}_1(x_1)x_1dx_1+\int\overset{44}{F}_2(x_2)dx_2\,,\end{aligned} \tag{3.103a}$$

$$f_2(x_1,x_2) = \overset{4}{C}_2\, x_2 + \overset{4}{C}_3 + \frac{d\,\overset{40}{F}_1(x_1)}{dx_1} + \left(\overset{41}{F}_1(x_1)\,x_1 + \frac{d\,\overset{41}{F}_1(x_1)}{dx_1} \right) e^{x_2} +$$
$$+\, x_1 e^{\frac{x_1^2}{2}}\, \overset{42}{F}_2(x_2) + \frac{d\,\overset{43}{F}_1(x_1)}{dx_1}\, x_2 + \overset{44}{F}_2(x_2)\,x_1, \qquad (3.103b)$$

$$f_3(x_1,x_2) = \overset{4}{C}_1\left(\frac{x_1^2}{2} - x_2 \right) + \overset{4}{C}_2\, x_1 + \overset{4}{C}_4 + \overset{41}{F}_1(x_1)\,e^{x_2} +$$
$$+\, e^{\frac{x_1^2}{2} - x_2} \int \frac{d\,\overset{42}{F}_2(x_2)}{dx_2} e^{x_2}\, dx_2 + \overset{4}{C}_5\, e^{\frac{x_1^2}{2} - x_2} + \overset{43}{F}_1(x_1) + \overset{44}{F}_2(x_2). \qquad (3.103c)$$

Harmadik eset

A megoldandó egyenlet.

$$f_2(x_1,x_2) = \frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_2}\, x_1 . \qquad (3.104)$$

Az egyenlet formailag nagyon hasonló a (49a) egyenlethez. Annak az egyenlet megoldása szempontjából különösebb jelentésege nincs, hogy az f_3 helyett f_1 szerepel benne, annak viszont van jelentõsége, hogy f_2 x_2 szerint vett deriváltja helyett maga az f_2 függvény szerepel. A gyakorlatban a megoldás menete azonos, mint a második esetben, csak az f_2-ben megmutatkozó eltérést kell néhány ponton figyelembe venni. Tehát, ahol lehet átveszszük a második esetbeli megoldást.

A megoldást összeg- és szorzatalakban keressük.

Ha az összeg alakú megoldást a

$$f_1(x_1,x_2) = \overset{5}{f}_1(x_1) + \overset{6}{f}_1(x_2)\,, \qquad (3.105a)$$

$$f_2(x_1,x_2) = \overset{5}{f}_2(x_1) + \overset{6}{f}_2(x_2) \qquad (3.105b)$$

alakban keressük, akkor a megoldás

$$f_1(x_1,x_2) = \overset{5}{f}_1(x_1) + \overset{6}{c}_1\, x_2\,, \qquad (3.106a)$$

$$f_2(x_1,x_2) = \frac{d\,\overset{5}{f}_1(x_1)}{dx_1} + \overset{6}{c}_1\, x_1 . \qquad (3.106b)$$

Az ehhez tartózó f_3 függvény értéke (49b) alapján:

$$f_3 = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\overset{5}{f}_1(x_1) + \overset{6}{c}_1\, x_2 \right) = \overset{6}{c}_1 . \qquad (3.107)$$

Ha a szorzat alakú megoldást a

$$f_1(x_1,x_2) = \overset{7}{f}_1(x_1)\cdot \overset{8}{f}_1(x_2)\,, \tag{3.108a}$$

$$f_2(x_1,x_2) = \overset{7}{f}_2(x_1)\cdot \overset{8}{f}_2(x_2) \tag{3.108b}$$

alakban keressük, akkor a megoldandó egyenlet

$$\overset{7}{f}_2(x_1)\cdot \overset{8}{f}_2(x_2) = \frac{d\,\overset{7}{f}_1(x_1)}{dx_1}\,\overset{8}{f}_1(x_2) + x_1\,\overset{7}{f}_1(x_1)\,\frac{d\,\overset{8}{f}_1(x_2)}{dx_2}\,. \tag{3.109}$$

Ez az egyenletet (65)-el analóg módon oldjuk meg.

Ha az x_2-öt tartalmazó függvényekre teszünk feltevést, akkor a (65)-nél ismetett eljárás lényegében változtatás nélkül alkalmazhatjuk. Ebben az esetben annak nincs szerepe, hogy f_2 nincs x_2 szerint deriválva, mivel az exponenciális függvény deriváltja önmaga.

Ha az x_1-et tartalmazó függvényekre teszünk feltevést, akkor két lehetõség közül választhatunk. Az egyik, hogy a (73)-mal analóg

$$\overset{82}{f}_1(x_2) + \frac{d\,\overset{82}{f}_1(x_2)}{dx_2} = \overset{82}{f}_2(x_2) \tag{3.110}$$

egyenletbõl egyszerûen kifejezzük $\overset{82}{f}_2(x_2)$ -t, a másik, hogy (110) egyenletet – hasonlóan a (73)-hoz – megoldjuk $\overset{82}{f}_1(x_2)$ függvényre nézve. Az elsõ esetben a (72)(82) indexpárt (73)(83) indexpárral cseréljük fel. Végül tisztán exponenciális megoldás esetén a (72)(82) indexpárt (74)(84) indexpárral cseréljük fel.

A szorzatalakban nyert megoldás az alábbi alakban foglalható össze.

$$f_1(x_1,x_2) = \overset{71}{f}_1(x_1)\overset{81}{c}_1 e^{x_2} + \overset{72}{c}_1 e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}\int \overset{82}{f}_2(x_2)e^{x_2}dx_2 + \overset{73}{c}_1 e^{\frac{x_1^2}{2}}\,\overset{83}{f}_2(x_2) + \overset{74}{c}_1\overset{84}{c}_1 e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}\,, \tag{3.111a}$$

$$f_2(x_1,x_2) = \left(\overset{71}{f}_1(x_1)x_1 + \frac{d\,\overset{71}{f}_1(x_1)}{dx_1}\right)\overset{81}{c}_1 e^{x_2} + \overset{72}{c}_1 x_1 e^{\frac{x_1^2}{2}}\,\overset{82}{f}_2(x_2) + \overset{73}{c}_1 x_1 e^{\frac{x_1^2}{2}}\left(\overset{83}{f}_2(x_2) + \frac{d\,\overset{83}{f}_2(x_2)}{dx_2}\right). \tag{3.111b}$$

A hozzá tartózó f_3 függvény:

$$\begin{aligned} f_3(x_1,x_2) &= \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\overset{71}{f}_1(x_1)\overset{81}{c}_3 e^{x_2} + \overset{72}{c}_1 e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}\int \overset{82}{f}_2(x_2)e^{x_2}dx_2 + \overset{73}{c}_1 e^{\frac{x_1^2}{2}}\,\overset{83}{f}_2(x_2) + \overset{74}{c}_1\overset{84}{c}_1 e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}\right) = \\ &= \overset{71}{f}_1(x_1)\overset{81}{c}_3 e^{x_2} - \overset{72}{c}_1 e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}\int \overset{82}{f}_2(x_2)e^{x_2}dx_2 + \overset{72}{c}_1 e^{\frac{x_1^2}{2}}\,\overset{82}{f}_2(x_2) + \overset{73}{c}_1 e^{\frac{x_1^2}{2}}\,\frac{d\,\overset{83}{f}_2(x_2)}{dx_2} - \overset{74}{c}_1\overset{84}{c}_1 e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}\,. \end{aligned} \tag{3.111c}$$

Ellenõrzés

Elegendõ a (104) egyenletet ellenõrizni, mert (2.8) a (104) x_2 szerinti parciális deriváltja, (2.9) pedig megegyezik az f_3-at értelmezõ egyenlettel.

$$\begin{aligned}
&\left(\overset{71}{f_1}(x_1)x_1+\frac{d\,\overset{71}{f_1}(x_1)}{dx_1}\right)\overset{81}{c_1}e^{x_2}+\overset{72}{c_1}x_1e^{\frac{x_1^2}{2}}\overset{82}{f_2}(x_2)+\overset{73}{c_1}x_1e^{\frac{x_1^2}{2}}\left(\overset{83}{f_2}(x_2)+\frac{d\,\overset{83}{f_2}(x_2)}{dx_2}\right)=\\
&=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\overset{71}{f_1}(x_1)\overset{81}{c_3}e^{x_2}+\overset{72}{c_1}e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}\int\overset{82}{f_2}(x_2)e^{x_2}dx_2+\overset{73}{c_1}e^{\frac{x_1^2}{2}}\overset{83}{f_2}(x_2)+\overset{72}{c_1}\overset{82}{c_1}e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}\right)+\\
&+x_1\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\overset{71}{f_1}(x_1)\overset{81}{c_3}e^{x_2}+\overset{72}{c_1}e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}\int\overset{82}{f_2}(x_2)e^{x_2}dx_2+\overset{73}{c_1}e^{\frac{x_1^2}{2}}\overset{83}{f_2}(x_2)+\overset{74}{c_1}\overset{84}{c_1}e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}\right).
\end{aligned}\tag{3.112}$$

Az azonosság a csak exponenciális függvényekre azonosan teljesül. Az integráltranszformált függvényre – végrehajtva az x_1 és x_2 szerinti differenciálást – írhatjuk, hogy

$$x_1\overset{82}{f_2}(x_2)=x_1e^{-x_2}\int\overset{82}{f_2}(x_2)e^{x_2}dx_2-x_1e^{-x_2}\int\overset{82}{f_2}(x_2)e^{x_2}dx_2+x_1e^{-x_2}\overset{82}{f_2}(x_2)e^{x_2},\tag{3.113}$$

ami igaz. Ezzel igazoltuk, hogy (112) teljesül.

Vizsgáljuk meg, hogy vajon a (103)-tól lényegében eltérõ megoldást kaptunk-e?

A „41” indexû megoldás megegyezik a (71)(81) indexpárú megoldással.

A „42” indexû megoldás megegyezik a (72)(82) indexpárú megoldással. Ahhoz, hogy ezt belássuk, az $\overset{42}{F_2}(x_2)=\overset{82}{f_2}(x_2)$ választással kell élni. Ekkor f_2 esetében az azonosság nyilvánvaló. Az f_1 és f_3 esetében az azonosság ugyanazon egyenlet fennállása esetén teljesül, nevezetesen, ha fennáll az

$$\frac{1}{e^x}\int\frac{d\,\overset{42}{F_2}(x_2)}{dx_2}e^{x_2}dx_2=\overset{42}{F_2}(x_2)-\frac{1}{e^x}\int\overset{42}{F_2}(x_2)e^{x_2}dx_2,\tag{3.114}$$

egyenlet. Parciális integrálást alkalmazva a bal oldalon (114) igazolható:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{e^x}\int\frac{d\,\overset{42}{F_2}(x_2)}{dx_2}e^{x_2}dx_2&=\frac{1}{e^x}\int\frac{d}{dx}\left(\overset{42}{F_2}(x_2)e^{x_2}\right)dx_2-\frac{1}{e^x}\int\overset{42}{F_2}(x_2)\frac{de^{x_2}}{dx}dx_2=\\
&=\overset{42}{F_2}(x_2)-\frac{1}{e^x}\int\overset{42}{F_2}(x_2)e^{x_2}dx_2.
\end{aligned}\tag{3.115}$$

Azaz felírható az alábbi integráltranszformáció is:

$$f(x)=\frac{1}{e^x}\int\frac{df(x)}{dx}e^xdx+\frac{1}{e^x}\int f(x)e^xdx.\tag{3.116}$$

Összevetve a (83) integráltranszformációval, kapjuk:

$$\int\left(\frac{1}{e^x}\int\frac{df(x)}{dx}e^x dx\right)dx=\frac{1}{e^x}\int f(x)e^x dx\,. \tag{3.117}$$

A (72)(82) indexpárú megoldás megegyezik a (73)(83) indexpárú megoldással. Ennek igazolásához azt kell belátni, hogy a következõ három azonosság teljesül:

$$(f_1)\qquad \overset{83}{f}_2(x_2)=\frac{1}{e^x}\int \overset{82}{f}_2(x_2)e^{x_2}dx_2\,, \tag{3.118a}$$

$$(f_2)\qquad \overset{83}{f}_2(x_2)+\frac{d\,\overset{83}{f}_2(x_2)}{dx_2}=\overset{82}{f}_2(x_2)\,, \tag{3.118b}$$

$$(f_3)\qquad \frac{d\,\overset{83}{f}_2(x_2)}{dx_2}=\overset{82}{f}_2(x_2)-\frac{1}{e^x}\int \overset{82}{f}_2(x_2)e^{x_2}dx_2\,. \tag{3.118c}$$

A bizonyítás azon alapul, hogy ha (118b,c) bal oldalán álló kifejezéseket (118a) segítségével kiküszöböljük, akkor azonosságot kapunk (Ez nem meglepõ, hiszen mindkét megoldás ugyanannak a differenciálegyenlet-rendszernek a megoldása). A (118) x_2 szerinti integráltranszformációt értelmez. A továbbiakban (118) bal oldalán álló kifejezést részesítjük elõnyben a jobb oldalon állóhoz képest.

A $\overset{4}{C}_5$ együtthatójú megoldás megegyezik a (74)(84) indexpárú megoldással.

Most a három kiegészítõ feltétel eseteit kell átnézni.

A (90)-nel analóg feltétel esetén a megoldást (92) alapján írhatjuk föl. (A (119b) a (90)-nel analóg feltétel.)

$$f_1(x_1,x_2)=\overset{8}{C}_1\left(\frac{x_1^{\,2}}{2}-x_2\right)+\overset{8}{C}_2\,e^{\frac{x_1^{\,2}}{2}-x_2}+\overset{0}{C}\,, \tag{3.119a}$$

$$f_2(x_1,x_2)=0\,, \tag{3.119b}$$

$$f_3(x_1,x_2)=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\overset{8}{C}_1\left(\frac{x_1^{\,2}}{2}-x_2\right)+\overset{8}{C}_2\,e^{\frac{x_1^{\,2}}{2}-x_2}+\overset{0}{C}\right)=-\overset{8}{C}_1-\overset{8}{C}_2\,e^{\frac{x_1^{\,2}}{2}-x_2}\,. \tag{3.119c}$$

Ez megegyezik a $\overset{4}{C}_4$, illetve $\overset{4}{C}_5$ együtthatójú megoldással.

A (93)-mal analóg feltétel esetén a megoldást (95) alapján írhatjuk föl. (A (120a) a (93)-mal analóg feltétel következménye.)

$$f_1(x_1,x_2)=\overset{84}{F}_1(x_1)\,, \tag{3.120a}$$

$$f_2(x_1,x_2)=\frac{d\,\overset{84}{F}_1(x_1)}{dx_1}\,, \tag{3.120b}$$

$$f_3(x_1,x_2)=\frac{\partial}{\partial x_2}\overset{84}{F}_1(x_1)=0\,. \tag{3.120c}$$

Ez megegyezik a „40” indexû megoldással.

A (98)-tel analóg feltétel esetén a megoldást (100) alapján írhatjuk föl. (121a) a (98)-tel analóg feltétel következménye)

$$f_1(x_1,x_2)=\overset{85}{F}_1(x_2)\,, \tag{3.121a}$$

$$f_2(x_1,x_2)=\frac{d\,\overset{85}{F}_1(x_2)}{dx_2}x_1\,, \tag{3.121b}$$

$$f_3(x_1,x_2)=\frac{d\,\overset{85}{F}_1(x_2)}{dx_2}\,. \tag{3.121c}$$

Ez megegyezik a „44” indexû megoldással $\int \overset{44}{F}_2(x_2)dx_2=\overset{85}{F}_1(x_2)$ választással. A továbbiakban a (121) alatti alakot alkalmazzuk.

Ezt követõen a kiegészítõ feltételekkel kapott megoldásokat ellenõrizni nincs miért.

Az e pontban elvégzett integrálások eredményeképpen a következõket kell megjegyezni.

Az $\{f_2,f_3\}$, illetve az $\{f_2,f_1\}$ csoportosítás alapvetõen ugyanarra az eredményre vezet. (Ami nem meglepõ, hiszen ugyanazon differenciálegyenlet-rendszert oldjuk meg.) Ez elsõ esetben nyert polinomiális megoldás gazdagabb, mint a második esetben nyert. Értelemszerûen a teljesebb megoldást vesszük figyelembe. A kétféle bontás egyúttal lehetõségét nyújtott egy integráltranszformáció értelmezésére, illetve a megoldásnak szimmetrikusabb alakban való elõállításra.

Végezetül rá kell mutatni a következõre. Az x_3 változótól független megoldásnak a legáltalánosabb alakja (51). Az (51b) egyenletet $f_1(x_1,x_2)$-re nézve differenciálegyenletnek tekintve kapjuk azokat a megoldásokat, amelyeket a második, illetve harmadik eset alatt állítottunk elõ. Ezeket 4P (partikuláris) megoldásként tartjuk számon.

Ezt követõen megadjuk ezeket a partikuláris megoldásokat.

$$f_1(x_1,x_2)=-\overset{4}{C}_1\left(\frac{x_1^4}{8}-\frac{x_1^2}{2}x_2+\frac{x_2^2}{2}\right)-\overset{4}{C}_2\,x_1\left(\frac{x_1^2}{3}-x_2\right)+\overset{4}{C}_3\,x_1-\overset{4}{C}_4\left(\frac{x_1^2}{2}-x_2\right)+$$

$$+\overset{40}{F}_1(x_1)+\overset{41}{F}_1(x_1)e^{x_2}+e^{\frac{x_1^2}{2}}\overset{42}{F}_2(x_2)-\overset{4}{C}_5\,e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}+\overset{43}{F}_1(x_1)x_2-\int\overset{43}{F}_1(x_1)x_1dx_1+\overset{44}{F}_2(x_2), \tag{3.122a}$$

$$\begin{aligned} f_2(x_1,x_2)&=\overset{4}{C}_2\,x_2+\overset{4}{C}_3+\frac{d\overset{40}{F}_1(x_1)}{dx_1}+\left(\overset{41}{F}_1(x_1)x_1+\frac{d\overset{41}{F}_1(x_1)}{dx_1}\right)e^{x_2}+\\ &+x_1e^{\frac{x_1^2}{2}}\left(\overset{42}{F}_2(x_2)+\frac{d\overset{42}{F}_2(x_2)}{dx_2}\right)+\frac{d\overset{43}{F}_1(x_1)}{dx_1}x_2+\frac{d\overset{44}{F}_2(x_2)}{dx_2}x_1, \end{aligned} \tag{3.122b}$$

$$\begin{aligned} f_3(x_1,x_2)&=\overset{4}{C}_1\left(\frac{x_1^2}{2}-x_2\right)+\overset{4}{C}_2\,x_1+\overset{4}{C}_4+\overset{41}{F}_1(x_1)e^{x_2}+\\ &+e^{\frac{x_1^2}{2}}\frac{d\overset{42}{F}_2(x_2)}{dx_2}+\overset{4}{C}_5\,e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}+\overset{43}{F}_1(x_1)+\frac{d\overset{44}{F}_2(x_2)}{dx_2}. \end{aligned} \tag{3.122c}$$

Fel kell hívni a figyelem arra, hogy a (103), illetve a (122) képletekben szereplõ $\overset{42}{F}$, illetve $\overset{44}{F}$ függvények nem azonosak!

3.2.4. Megjegyzések

Két változótól való függetlenség

Két változótól való függetlenség alapvetõen triviális feladatokra vezet. Ugyanakkor érdemes áttekinteni, mivel az ebben a fejezetben nyert megoldások egyfajta ellenõrzését kínálja.

Az (x_1,x_2) párostól való egyidejû függetlenség.

Ez formálisan azt jelenti, hogy a három f_i függvény mindegyike csak x_3-tól függhet (természetesen f_2 kivétel, az függhet x_1-tõl). Ezen kívül fenn kell, hogy álljanak az alábbi egyenletek:

$$\frac{\partial x_3 f_3}{\partial x_3}=0, \tag{3.123a}$$

$$f_2-x_1f_3=0. \tag{3.123b}$$

Természetesen felhasználhatjuk az eddigi eredményeinket. Az x_1-tõl való függetlenség feltételébõl nyert (30) alatti megoldást x_2-tõl függetlennek tekintjük, akkor az alábbi megoldást nyerjük.

$$f_1(x_3)=\overset{0}{F}_3(x_3), \tag{3.124a}$$

$$f_2(x_1,x_3)=\overset{0}{F}_1(x_1)/x_3, \tag{3.124b}$$

$$f_3(x_3) = \overset{0}{C} / x_3 \,. \tag{3.124c}$$

Ez megegyezik a (45) alatti egyenletbõl nyert megoldással, ha azt x_1-tõl tekintjük függetlennek.

Itt persze két tényt használtunk ki. az elsõ, hogy (45)-ben az $\overset{3}{F}_3(x_3) = 1/x_3$ választással f_1 független az x_1-tõl. A második, hogy értelmezésünk szering f_2 függhet az x_1-tõl, mert f_2 x_1 szerinti parciális deriváltja nem szerepel az egyenletrendszerben.

Az (x_2,x_3) párostól való egyidejû függetlenség.

Ez formálisan azt jelenti, hogy a három f_i függvény mindegyike csak x_1-tól függhet (természetesen f_1 kivétel, az függhet x_3-tõl). Ezen kívül fenn kell, hogy álljanak az alábbi egyenletek:

$$\frac{\partial x_3 f_3}{\partial x_1} = 0 \,, \tag{3.125a}$$

$$f_3 = 0 \,, \tag{3.125b}$$

$$f_2 - x_1 f_3 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \,. \tag{3.125c}$$

Ez a „40” indexû megoldásra vezet, azaz

$$f_1(x_1, x_3) = \overset{40}{F}_1(x_1) + \overset{0}{F}_3(x_3) \,, \tag{3.126a}$$

$$f_2(x_1) = \frac{d\overset{40}{F}_1(x_1)}{dx_1} \,, \tag{3.126b}$$

$$f_3(x_1) = 0 \,. \tag{3.126c}$$

Megjegyezzük, hogy mind a (45) megoldásból x_3 szerinti függetlenséget, mind az (51) megoldásból x_2 szerinti függetlenséget feltételezve ugyanehhez az eredményhez jutunk.

Az (x_3,x_1) párostól való egyidejû függetlenség.

Ez formálisan azt jelenti, hogy a három f_i függvény mindegyike csak x_2-tól függhet (természetesen f_2 kivétel, az függhet x_1-tõl, valamint f_1, mert függhet x_3-tõl). Ezen kívül fenn kell, hogy álljanak az alábbi egyenletek:

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(f_2 - x_1 f_3) = 0 \,, \tag{3.127a}$$

$$f_3 = \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \,, \tag{3.127b}$$

$$f_2 - x_1 f_3 = 0 . \tag{3.127c}$$

Ennek a megoldását is indirekt úton állítjuk elõ. Az x_1-tõl való függetlenség feltételébõl nyert (30) alatti megfoldást x_3-tõl függetlennek tekintjük, akkor az alábbi megoldást nyerjük.

$$f_1(x_2, x_3) = \overset{2}{F}_2(x_2) + \overset{0}{F}_3(x_3) , \tag{3.128a}$$

$$f_2(x_1, x_2) = x_1 \frac{d \overset{2}{F}_2(x_2)}{dx_2} , \tag{3.128b}$$

$$f_3(x_2) = \frac{d \overset{2}{F}_2(x_2)}{dx_2} . \tag{3.128c}$$

Megjegyezzük, hogy az (51) megoldásból x_1 szerinti függetlenséget feltételezve ugyanehhez az eredményhez jutunk.

Az eltolási szimmetriáról

Az (általános) eltolási szimmetriát az alábbi összefüggéssel értelmezzük:

$$\frac{\partial f}{\partial j} = 0 , \tag{3.129}$$

ahol • az eltolás iránya.

Az x_i irányú eltolási szimmetriát az alábbi feltételekkel értelmezzük:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i} = 0 , \tag{3.130a}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_i} = 0 , \tag{3.130b}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_i} = 0 , \tag{3.130c}$$

ami alapján az f_j (j = 1,2,3) függvényeket az

$$f_j = f_j(x_{i+1|\mathrm{mod}\,3}, x_{i+2|\mathrm{mod}\,3}) \tag{3.131}$$

alakban kell keresni.

Ez a jelen pontban tárgyaltakhoz képest a 2. részmegoldásban jelentõs változást eredményez, mert f_2-ben nem lehet jelen az x_1 változó, a 3. részmegoldás változatlan, a 4. részmegoldás változatlan. A részleteket mellõzzük.

3.3. Az egyenletrendszer szeparálása két, illetve egy függ-

vényt tartalmazó részrendszerek összegére

3.3.1. Az $\{f_1,f_2\}$ és $\{f_3\}$ csoportosítás esete

A szétválasztás feltételei az f_3 függvényre:

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1}+x_1\frac{\partial f_3}{\partial x_2}=0\,, \tag{3.132a}$$

$$\frac{\partial x_3 f_3}{\partial x_3}=0\,. \tag{3.132b}$$

Ez az 1. részmegoldást értelmezi az f_3 függvényre (lásd az (1c) és a (4) egyenleteket). Ezért ezzel itt a továbbiakban nem foglalkozunk.

A szétválasztás társuló feltétele az $\{f_1,f_2\}$ függvénypárosra:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2}=0\,, \tag{3.133a}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2}=0\,, \tag{3.133b}$$

ami alapján az $\{f_1,f_2\}$ függvénypárost

$$f_1=f_1(x_1,x_3) \tag{3.134a}$$

$$f_2=f_2(x_1,x_3) \tag{3.134b}$$

alakban kell keresni.

Ekkor a megoldandó egyenlet az $\{f_1,f_2\}$ függvénypárosra:

$$\frac{\partial x_3 f_2}{\partial x_3}=\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\,. \tag{3.135}$$

A (134) feltétel és a (135) egyenlet megegyezik a 3.2.2. pontban értelmezett x_2 változótól független feladatkitűzés $\{f_1,f_2\}$ függvénypárosra vonatkozó részével. A megoldást a (45a,b) összefüggések adják.

3.3.2. Az $\{f_2,f_3\}$ és $\{f_1\}$ csoportosítás esete

A szétválasztás feltételei az f_1 függvényre:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}=0\,, \tag{3.136a}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2}=0\,. \tag{3.136b}$$

Ez az 0. részmegoldást értelmezi az f_1 függvényre (lásd az (1a) és a (2a) összefüggéseket). Ezért ezzel itt a továbbiakban nem foglalkozunk.

A szétválasztás feltételei f_2 és f_3 függvényekre:

$$\frac{\partial x_3 f_3}{\partial x_3} = 0\,, \tag{3.137a}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}(x_3 f_2 - x_1 x_3 f_3) = 0\,. \tag{3.137b}$$

A (137b)-be (137a)-t behelyettesítve nyerjük,

$$\frac{\partial x_3 f_2}{\partial x_3} = 0\,, \tag{3.137c}$$

ami alapján az f_2 és f_3 függvényeket a

$$f_2 = f_2(x_1, x_2) / x_3\,, \tag{3.138a}$$

$$f_3 = f_3(x_1, x_2) / x_3 \tag{3.138b}$$

alakban kell keresni.

Ekkor a megoldandó egyenlet az $\{f_1, f_2\}$ függvénypárosra:

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\partial f_3}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial f_3}{\partial x_2}\,. \tag{3.139}$$

Ez a feladat igen hasonló az 3.2.3. pontban értelmezett feladathoz. A (139) egyenlet megegyezik a (49a) egyenlettel. A két feladatban az eltérés az, hogy az x_3 változótól független megoldásban f_1 kapcsolódik a $\{f_1, f_2\}$ függvénypároshoz, itt ez nem áll fenn. Továbbá az x_3 változótól független megoldásban – a definíció értelmében – az $\{f_1, f_2\}$ függvénypáros független x_3-tól, itt reciprok összefüggés áll fenn. (Vessd össze a (48) és a (138) képleteket!) Mindezek ellenére, vagy éppen e mellett, a 3.2.3 pontban nyert megoldást, pontosabban a (3.49a) egyenlet megoldását – tehát a (60) és az (78), valamint (95) és (100) összefüggéseket – a jelen feladat megoldására felhasználhatjuk. Ennek során mindösszesen arra kell figyelemmel lenni, hogy az abban szereplõ függvényeket x_3-mal osztani kell.

Végül felhasználjuk a (115) alatti összefüggéseket is.

A nyert megoldás az alábbi alakban foglalható össze. (A függvényeket és a konstansokat a korábban leírt módon egységesítjük.)

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = \overset{0}{F}_3(x_3)\,, \tag{3.140a}$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = \left(\overset{51}{F}_1(x_1) x_1 + \frac{d\, \overset{51}{F}_1(x_1)}{dx_1} \right) e^{x_2} / x_3 + x_1 e^{\frac{x_1^{\,2}}{2}} \left(\overset{52}{F}_2(x_2) + \frac{d\, \overset{52}{F}_2(x_2)}{dx_2} \right) / x_3 + \tag{3.140b}$$

$$+\frac{d\overset{53}{F_1}(x_1)}{dx_1}x_2/x_3+\overset{54}{F_2}(x_2)x_1/x_3+\overset{5}{C_2}\,x_2/x_3+\overset{5}{C_3}/x_3+\overset{0}{F_1}(x_1)/x_3,$$

$$\begin{aligned}f_3(x_1,x_2,x_3)&=\overset{51}{F_1}(x_1)e^{x_2}/x_3+e^{\frac{x_1^2}{2}}\frac{d\overset{52}{F_2}(x_2)}{dx_2}/x_3+\overset{53}{F_1}(x_1)/x_3+\\&+\overset{54}{F_2}(x_2)/x_3+\overset{1}{C_1}\left(\frac{x_1^2}{2}-x_2\right)/x_3+\overset{1}{C_2}\,e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}/x_3+\overset{5}{C_2}\,x_1/x_3+\overset{0}{C}/x_3.\end{aligned}\tag{3.140c}$$

A felírásnál már felhasználtuk, hogy f_3-ban a polinomok, illetve az exponenciális függvény-per-x_3 az 1. részmegoldást adják vissza. Továbbá az f_2 esetén a const/x_3 partikuláris eset, a továbbiakban figyelmen kívül hagyható. Végezetül belátható, hogy a $\overset{5}{C_2}$ együtthatós megoldás az „53” részmegoldás partikuláris esete $\overset{53}{F_1}(x_1)=\overset{5}{C_2}\,x_1$ választással.

Mivel a megoldást nem teljes egészében vettük át, célszerûnek tûnik ellenõrizni, vagy legalábbis végiggondolni az ellenõrzést.

Mivel $\{f_1,f_2\}$ függvénypáros (138) alakú, ezért a (2.9) egyenlet bal oldala zérus. Mivel f_1 független x_2-tõl, ezért a jobb oldal is. Hasonló meggondolással igazolható, hogy a (2.8) egyenlet is teljesül. Ezek után ellenõrizni a (2.7) egyenletet kell. Ebben viszont nem játszik szerepet az x_3, mint osztó, hiszen az egyenletben szereplõ minden kifejezésben szerepel szorzótényezõként is. Tehát ugyanazokat az (x_1,x_2)-tõl függõ függvényeket kell beírni ugyanabba az egyenletbe, mint a 3.2.3. pontban tettük, azaz a (2.7) egyenlet is teljesül.

3.3.3. Az $\{f_3,f_1\}$ és $\{f_2\}$ csoportosítás esete: $\{f_2\}$ független az $\{f_3,f_1\}$ párostól

A szétválasztás feltételei az f_2 függvényre:

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2}=0,\tag{3.141a}$$

$$\frac{\partial x_3 f_2}{\partial x_3}=0.\tag{3.141b}$$

Ez a 0. részmegoldást értelmezi az f_2 függvényre (lásd az (1b) és a (2b) képleteket). Ezért ezzel itt a továbbiakban nem foglalkozunk.

Az $\{f_3,f_1\}$ függvénypárosra nézve a többi egyenlet nem feltétel, hanem megoldandó egyenletrendszer. Ez a következõ

$$-\frac{\partial x_1x_3 f_3}{\partial x_2}=\frac{\partial x_3 f_3}{\partial x_1},\tag{3.142a}$$

$$\frac{\partial x_3 f_3}{\partial x_3} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \tag{3.142b}$$

$$-\frac{\partial x_1 x_3 f_3}{\partial x_3} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}. \tag{3.142c}$$

Mint azt a következõ pontban megmutatjuk, ez egy általánosabb eset része, ezért nem itt, hanem ott tárgyaljuk.

3.4. Az f_2 arányos az $x_1 f_3$ kifejezéssel

Ebben a pontban kihasználjuk azt a tényt, hogy az $f_2 - x_1 f_3$ kifejezés egyaránt szerepel a (2.7), és a (2.9) egyenletben. Ugyanis, ha f_2 arányos az $x_1 f_3$ kifejezéssel, akkor formálisan nem szerepel az egyenletrendszerben. Ezt a feltételt a

$$f_2 = l\, x_1 f_3 . \tag{3.143}$$

alakba írjuk. Három esetet fogunk vizsgálni: • • 0, • • 1, továbbá a • = 0, valamint a • = 1 eseteket.

3.4.1. Általános eset: • • 0, • • 1

A megoldandó egyenletrendszer a:

$$-(1-l)\frac{\partial x_1 x_3 f_3}{\partial x_2} = \frac{\partial x_3 f_3}{\partial x_1}, \tag{3.144a}$$

$$\frac{\partial x_3 f_3}{\partial x_3} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \tag{3.144b}$$

$$-(1-l)\frac{\partial x_1 x_3 f_3}{\partial x_3} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}. \tag{3.144c}$$

A (144b) egyenlet segítségével a (144c) egyenletbõl az f_3 függvényt kiküszöböljük. Átrendezve az egyenleteket

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} + (1-l)x_1\frac{\partial f_3}{\partial x_2} = 0, \tag{3.145a}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + (1-l)x_1\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0, \tag{3.145b}$$

$$\frac{\partial x_3 f_3}{\partial x_3} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}. \tag{3.145c}$$

A (145) alapján a két függvény szerkezete a következõ

$$f_1 = f_1(x_1, x_3)\cdot g_1(x_3), \tag{3.146a}$$

$$f_3 = f_3(x_1, x_3)\cdot g_3(x_3)\,. \tag{3.146b}$$

Ezen belül az f_i (i = 1,3) megoldását az (145a,b) adja, míg a két függvényt az (145c) egyenlet „csatolja” egymáshoz.

Az (145a,b) típusú egyenletet már megoldottuk, lásd a (4) egyenletet. Az eltérés csupán annyi, hogy ez egyik tagban megjelent egy (1 – •) szorzótényezõ. Továbbá, a (4) egyenletben f_3 nem volt x_3-tól független, és ezért ott megjelent a x_3, mint osztó. Mindezeket figyelembe véve a megoldást a (14c) alapján írjuk fel mindkét függvény x_1 és x_2 változótól függõ részére, egyébként figyelembe vesszük (146) összefüggést is.

$$f_1(x_1,x_2,x_3) = \left((1-l)\frac{x_1^2}{2} - x_2\right)\overset{1}{g}_1(x_3) + e^{(1-l)\frac{x_1^2}{2}-x_2}\,\overset{2}{g}_1(x_3) + \overset{3}{g}_1(x_3)\,, \tag{3.147a}$$

$$f_3(x_1,x_2,x_3) = \left((1-l)\frac{x_1^2}{2} - x_2\right)\overset{1}{g}_3(x_3) + e^{(1-l)\frac{x_1^2}{2}-x_2}\,\overset{2}{g}_3(x_3) + \overset{3}{g}_3(x_3)\,. \tag{3.147b}$$

A (147) függvények a (145a,b) egyenleteket kielégíti, hiszen ez alapján határoztuk meg azt. Most tekintsük a (145c) egyenletet!

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\left((1-l)\frac{x_1^2}{2} - x_2\right)x_3\,\overset{1}{g}_3(x_3) + e^{(1-l)\frac{x_1^2}{2}-x_2}\,x_3\,\overset{2}{g}_3(x_3) + x_3\,\overset{3}{g}_3(x_3)\right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\left((1-l)\frac{x_1^2}{2} - x_2\right)\overset{1}{g}_1(x_3) + e^{(1-l)\frac{x_1^2}{2}-x_2}\,\overset{2}{g}_1(x_3) + \overset{3}{g}_1(x_3)\right),\end{aligned} \tag{3.148}$$

amely három egyenletre esik szét. Az elsõ egyenlet,

$$\left((1-l)\frac{x_1^2}{2} - x_2\right)\frac{d}{dx_3}\left(x_3\,\overset{1}{g}_3(x_3)\right) = \overset{1}{g}_1(x_3)\,, \tag{3.149}$$

megoldása, a változók szétválasztásának módszerével, az, hogy

$$\overset{1}{g}_3(x_3) = \overset{1}{c}_3/\,x_3\,, \tag{3.150a}$$

$$\overset{1}{g}_1(x_3) = 0\,. \tag{3.150b}$$

A második egyenlet

$$e^{(1-l)\frac{x_1^2}{2}-x_2}\,\frac{dx_3\,\overset{3}{g}_3(x_3)}{dx_3} = -e^{(1-l)\frac{x_1^2}{2}-x_2}\,\overset{2}{g}_1(x_3)\,, \tag{3.151}$$

ami alapján

$$\overset{2}{g}_1(x_3) = -\frac{dx_3\,\overset{2}{g}_3(x_3)}{dx_3}\,. \tag{3.152}$$

A harmadik egyenlet

$$\frac{dx_3\,\overset{3}{g}_3(x_3)}{dx_3} = \frac{d\,\overset{3}{g}_1(x_3)}{dx_2} = 0\,, \tag{3.153}$$

azaz

$$\overset{3}{g}_3(x_3) = \overset{0}{C}/\,x_3\,, \tag{3.154a}$$

$$\overset{3}{g}_1(x_3) = 0\,. \tag{3.154b}$$

Tehát felírható a megoldás (• • 0,1) esetre

$$f_1 = -e^{(1-l)\frac{x_1^2}{2}-x_2}\,\frac{dx_3\,\overset{6l}{F}_3(x_3)}{dx_3} + \overset{0}{F}_3(x_3)\,, \tag{3.155a}$$

$$f_2 = l\,x_1 e^{(1-l)\frac{x_1^2}{2}-x_2}\,\overset{6l}{F}_3(x_3) + l\,x_1\,\overset{6l}{C}\left((1-l)\frac{x_1^2}{2} - x_2\right)/\,x_3\,, \tag{3.155b}$$

$$f_3 = e^{(1-l)\frac{x_1^2}{2}-x_2}\,\overset{6l}{F}_3(x_3) + \overset{6l}{C}\left((1-l)\frac{x_1^2}{2} - x_2\right)/\,x_3 + \overset{0}{C}/\,x_3\,. \tag{3.155c}$$

Ellenõrzés

Mivel fennáll az $f_2 = \bullet x_1 f_3$ összefüggés, ezért elegendõ a (144) egyenletek teljesülését vizsgálni. Ezen belül az f_3 $/x_3$-as tagját a (144b,c) egyenletekbe behelyettesíteni nem szükséges, mivel zérust adnak.

(144a)

$$\begin{aligned}-(1-l)\frac{\partial}{\partial x_2}&\left(x_1x_3 e^{(1-l)\frac{x_1^2}{2}-x_2}\,\overset{6l}{F}_3(x_3) + x_1\,\overset{6l}{C}\left((1-l)\frac{x_1^2}{2}-x_2\right)\right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_3 e^{(1-l)\frac{x_1^2}{2}-x_2}\,\overset{6l}{F}_3(x_3) + \overset{6l}{C}\left((1-l)\frac{x_1^2}{2}-x_2\right)\right),\end{aligned} \tag{3.156a}$$

(144b)

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(x_3 e^{(1-l)\frac{x_1^2}{2}-x_2}\,\overset{6l}{F}_3(x_3)\right) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(-e^{(1-l)\frac{x_1^2}{2}-x_2}\,\frac{\partial x_3\,\overset{6l}{F}_3(x_3)}{\partial x_3}\right), \tag{3.156b}$$

(144c)

$$-(1-l)\frac{\partial}{\partial x_3}\left(x_1x_3 e^{(1-l)\frac{x_1^2}{2}-x_2}\,x_3\,\overset{6l}{F}_3(x_3)\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(-e^{(1-l)\frac{x_1^2}{2}-x_2}\,\frac{\partial x_3\,\overset{6l}{F}_3(x_3)}{\partial x_3}\right). \tag{3.156c}$$

Az azonosság mindhárom esetben fennáll.

3.4.2. Egyedi eset: • = 0

A megoldás:

$$f_1 = -e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}\frac{dx_3\,\overset{60}{F}_3(x_3)}{dx_3} + \overset{0}{F}_3(x_3)\,, \tag{3.157a}$$

$$f_2 = 0\,, \tag{3.157b}$$

$$f_3 = e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}\,\overset{60}{F}_3(x_3) + \overset{60}{C}\left(\frac{x_1^2}{2} - x_2\right)/\,x_3 + \overset{0}{C}/\,x_3\,. \tag{3.157c}$$

Érdembeli változás nincs. Ellenõrizni nem szükséges.

Megjegyzés: ez megegyezik 3.3.3. pontban (nem) tárgyalt esettel.

3.4.3. Egyedi eset: • = 1

A megoldást kétféleképen írhatjuk fel. Egyrészt formálisan (155) alapján. Másrészt, annak következtében, hogy $f_2 = x_1 f_3$ (ez megegyezik a (19) összefüggéssel), mind a (2.7), mind a (2.9) bal oldala zérussá vált, így jobb oldala is azzal kell, hogy egyenlõ legyen (ez megegyezik a (16) egyenletekkel, ezért, a megoldandó egyenlet a (20) egyenlet. Ennek következtében a megoldás szóról szóra megegyezik a (30) alattival. Az összefüggések ismételt kiírásától eltekintünk, csak egy-egy betûvel jelezzük, hogy a második megoldás is ehhez az esethez tartozik. Tehát a megoldás:

$$f_1 = \overset{2}{F}_1 - e^{-x_2}\frac{dx_3\,\overset{61}{F}_3(x_3)}{dx_3} + \overset{0}{F}_3(x_3)\,, \tag{3.158a}$$

$$f_2 = \overset{2}{F}_2 + x_1 e^{-x_2}\,\overset{61}{F}_3(x_3) - \overset{61}{C}\,x_1 x_2/\,x_3\,, \tag{3.158b}$$

$$f_3 = \overset{2}{F}_3 + e^{-x_2}\,\overset{61}{F}_3(x_3) - \overset{61}{C}\,x_1/\,x_3 + \overset{61}{C}/\,x_3\,. \tag{3.158c}$$

A formálisan nyert megoldás tulajdonképpen a 2. megoldás partikuláris esete $\overset{2}{F}_2(x_2) = -e^{-x_2}$ választással. Továbbá a $\overset{61}{C}$ együtthatójú tag szintén a 2. megoldás partikuláris esete $\overset{2}{F}_2(x_2) = x_2$ és $\overset{2}{F}_3(x_3) = 1/\,x_3$ választással.

3.4.4. A nyert megoldások összefoglalása és vizsgálata

A következõ oldalakon táblázatos formában kigyûjtöttük a megoldásokat.

A táblázatokban a következõ jelöléseket alkalmazzuk:

∂_i i-edik változó szerinti parciális deriválás

$\overset{nk}{F}_i$ az n-edik megoldás k-adik változatának i-edik változótól függõ függvénye

$\overset{n}{C}_k$ az n-edik megoldás k-adik változatának együtthatója

$$P_1 = \frac{x_1^2}{2}$$

$$P = \frac{x_1^2}{2} - x_2$$

$$P_3 = \frac{x_1^2}{3} - x_2$$

$$P_l = (1-l)\frac{x_1^2}{2} - x_2$$

A zárójelben a megoldás sorszámát tüntettük föl.

1. Táblázat

	Független megoldás (***0***)	Szétválasztás (***1***)
$f_1 =$	$\overset{0}{F}_3$	$\overset{0}{F}_3$
$f_2 =$	$\overset{0}{F}_1/x_3$	$\overset{0}{F}_1/x_3$
$f_3 =$	$\overset{0}{C}/x_3$	$\overset{1}{C}_1 P/x_3 + \overset{1}{C}_2 e^P/x_3 + \overset{0}{C}/x_3$

2. Táblázat

	Egy független változótól független		
	$\frac{\partial}{\partial x_1} = 0$ (***2***)	$\frac{\partial}{\partial x_2} = 0$ (***3***)	$\frac{\partial}{\partial x_3} = 0$ (***4***)
$f_1 =$	$\overset{2}{F}_2\,\partial_3(x_3\overset{2}{F}_3) + \overset{0}{F}_3$	$\overset{3}{F}_1\,\partial_3(x_3\overset{3}{F}_3) + \overset{0}{F}_3$	$f_1 = \overset{4}{F}_{12}(x_1, x_2)$
$f_2 =$	$x_1\partial_2(\overset{2}{F}_2)\,\overset{2}{F}_3 + \overset{0}{F}_1/x_3$	$\partial_1(\overset{3}{F}_1)\,\overset{3}{F}_3$	$f_2 = \partial_1\overset{4}{F}_{12}(x_1, x_2) + x_1\partial_2\overset{4}{F}_{12}(x_1, x_2)$
$f_3 =$	$\partial_2(\overset{2}{F}_2)\,\overset{2}{F}_3 + \overset{0}{C}/x_3$	$\overset{0}{C}/x_3$	$f_3 = \partial_2\overset{4}{F}_{12}(x_1, x_2)$

2/A. Táblázat

Egy független változótól független, partikuláris

$$\frac{\partial}{\partial x_3} = 0 \quad (\boldsymbol{4P})$$

$f_1 =$	$-\overset{4}{C}_1 P^2/2 - \overset{4}{C}_2 x_1 P_3 + \overset{4}{C}_3 x_1 - \overset{4}{C}_4 P - \overset{4}{C}_5 e^P +$ $+\overset{40}{F}_1 + \overset{41}{F}_1 e^{x_2} + e^{P_1}\overset{42}{F}_2 + \overset{43}{F}_1 x_2 - \int \overset{43}{F}_1 x_1 dx_1 + \overset{44}{F}_2$
$f_2 =$	$+\overset{4}{C}_2 x_2 + \overset{4}{C}_3 + \partial_1 \overset{40}{F}_1 +$ $+(\overset{41}{F}_1 x_1 + \partial_1 \overset{41}{F}_1)e^{x_2} + x_1 e^{P_1}(\overset{42}{F}_2 + \partial_2 \overset{42}{F}_2) + \partial_1 \overset{43}{F}_1 x_2 + x_1 \partial_2 \overset{44}{F}_2$
$f_3 =$	$\overset{4}{C}_1 P + \overset{4}{C}_2 x_1 + \overset{4}{C}_4 + \overset{4}{C}_5 e^P$ $+\overset{41}{F}_1 e^{x_2} + e^{P_1}\partial_2 \overset{42}{F}_2 + \overset{43}{F}_1 + \partial_2 \overset{44}{F}_2$

2/B. Táblázat

Integráltranszformációk

Egyedi		A három f_i függvényre
$f(x) = \frac{1}{e^x}\int \frac{df(x)}{dx} e^x dx + \int\left(\frac{1}{e^x}\int \frac{df(x)}{dx} e^x dx\right)dx$	$f_1 =$	$f(x) = e^{-x}\int g(x) e^x dx$
$f(x) = \frac{1}{e^x}\int \frac{df(x)}{dx} e^x dx + \frac{1}{e^x}\int f(x) e^x dx$	$f_2 =$	$f(x) + \frac{df(x)}{dx} = g(x)$
$\int\left(\frac{1}{e^x}\int \frac{df(x)}{dx} e^x dx\right)dx = \frac{1}{e^x}\int f(x) e^x dx$	$f_3 =$	$\frac{df(x)}{dx} = g(x) - e^{-x}\int g(x) e^x dx$

3. Táblázat

Két és egy függvényre való szétválasztás

	$\{f_1,f_2\}$ és $\{f_3\}$ (***3***)	$\{f_2,f_3\}$ és $\{f_1\}$ (***5 • 4P/x₃***)	$\{f_3,f_2\}$ és $\{f_1\}$ (***60***)
$f_1 =$	$\overset{3}{F}_1 \partial_3 (x_3 \overset{3}{F}_3) + \overset{0}{F}_3$	$\overset{0}{F}_3$	$-e^P \partial_3 (x_3 \overset{60}{F}_3) + \overset{0}{F}_3$
$f_2 =$	$\partial_1 (\overset{3}{F}_1) \overset{3}{F}_3$	$(\overset{51}{F}_1 x_1 + \partial_1 \overset{51}{F}_1) e^{x_2} / x_3 + x_1 e^{P_1} (\overset{52}{F}_2 + \partial_2 \overset{52}{F}_2) / x_3 +$ $+\partial_1 \overset{53}{F}_1 x_2 / x_3 + \overset{54}{F}_2 x_1 / x_3 + \overset{0}{F}_1 / x_3$	$\varnothing_{60}$
$f_3 =$	$\overset{0}{C} / x_3$	$\overset{51}{F}_1 e^{x_2} / x_3 + e^{P_1} \partial_2 \overset{52}{F}_2 / x_3 +$ $+\overset{53}{F}_1 / x_3 + \overset{54}{F}_2 / x_3 + \overset{1}{C}_1 P / x_3 + \overset{1}{C}_2 e^P / x_3 + \overset{0}{C} / x_3$	$e^P \overset{60}{F}_3 + \overset{60}{C} P / x_3 + \overset{0}{C} / x_3$

4. Táblázat

Az $f_2 = \bullet x_1 f_3$ esete

	$\bullet \bullet 1,0$ ($6\bullet$)	$\bullet = 0$ (60)	$\bullet = 1$ (2)
$f_1 =$	$-e^{P_l}\partial_3(x_3\overset{6l}{F_3})+\overset{0}{F_3}$	$-e^{P}\partial_3(x_3\overset{60}{F_3})+\overset{0}{F_3}$	$\overset{2}{F_2}\partial_3(x_3\overset{2}{F_3})+\overset{0}{F_3}$
$f_2 =$	$l x_1 e^{P_l}\overset{6l}{F_3}+l x_1\overset{6l}{C}P_l/x_3$	$\varnothing_{60}$	$x_1\partial_2(\overset{2}{F_2})\overset{2}{F_3}+\overset{0}{F_1}/x_3$
$f_3 =$	$e^{P_l}\overset{6l}{F_3}+\overset{6l}{C}P_l/x_3$	$e^{P}\overset{60}{F_3}+\overset{60}{C}P/x_3+\overset{0}{C}/x_3$	$\partial_2(\overset{2}{F_2})\overset{2}{F_3}+\overset{0}{C}/x_3$

3.5. Az f_i függvények alapján az s függvény elõállítása

Az s függvényt az f_i (i = 1,2,3) függvényekbõl a (2.4-6) összefüggések alapján határozzuk meg. Ezek alapján az s függvényre három különbözõ alakot kapunk, nevezetesen.

$$s_1 = \int x_3 f_2 - x_1 x_3 f_3 dx_1 + \tilde{s}_1(x_2, x_3)\,, \tag{3.159a}$$

$$s_2 = \int x_3 f_3 dx_2 + \tilde{s}_2(x_3, x_1)\,, \tag{3.159b}$$

$$s_3 = \int f_1 dx_3 + \tilde{s}_3(x_1, x_2)\,. \tag{3.159c}$$

Az integrálhatósági feltételek teljesülés miatt a három integrál azonos függvényeket ad, $s_1 = s_2 = s_3$, bár elõfordulhat, hogy az egyes konkrét függvények esetén a három integrál nem azonos, ekkor az $\tilde{s}_i(x_{i+1|\mathrm{mod}\,3}, x_{i+2|\mathrm{mod}\,3})$ függvények segítségével „pótoljuk” a hiányzó tago(ka)t.

Az elvet az 1. megoldás során mutatjuk be, késõbb csak alkalmazzuk, de részleteiben nem ismertetjük.

Az egyes megoldástípusokra az s függvény.

Az 1. megoldás: $f_3 \bullet 0$.

Csak az egy nullától különbözõ függvényt írjuk fel.

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = \overset{1}{C_1}\left(\frac{x_1^2}{2} - x_2\right)/x_3 + \overset{1}{C_2}e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}/x_3\,. \tag{3.14c}$$

Ebbõl a (159) alapján (x_3-mal egyszerûsítettünk):

$$\overset{1}{s_1} = -\int x_1\left(\overset{1}{C_1}\left(\frac{x_1^2}{2} - x_2\right) + \overset{1}{C_2}e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}\right)dx_1 = -\overset{1}{C_1}\left(\frac{x_1^4}{8} - \frac{x_1^2}{2}x_2\right) - \overset{1}{C_2}e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}\,, \tag{3.160a}$$

$$\overset{1}{s}_2 = \int \overset{1}{C}_1\left(\frac{x_1^{\,2}}{2} - x_2\right) + \overset{1}{C}_3 e^{\frac{x_1^{\,2}}{2} - x_2} dx_2 = \overset{1}{C}_1\left(\frac{x_1^{\,2}}{2} x_2 - \frac{x_2^{\,2}}{2}\right) - \overset{1}{C}_3 e^{\frac{x_1^{\,2}}{2} - x_2}, \tag{3.160b}$$

$$\overset{1}{s}_3 = 0\,. \tag{3.160c}$$

Mivel az $\overset{1}{s}_1$ és $\overset{1}{s}_2$ csak x_1 és x_2 változótól függ, ezért a $\overset{1}{s}_3$-ban a szükséges tagok $\tilde{s}_3(x_1, x_2)$ megfelelõ megválasztásával „pótolhatók”. Analóg módon az $\overset{1}{s}_1$-bõl (az $\overset{1}{s}_2$-höz viszonyítva) hiányzó $-\overset{1}{C}_1 x_2^{\,2}/2$ tag $\tilde{s}_1(x_2, x_3)$ alapján, az $\overset{1}{s}_2$-bõl (az $\overset{1}{s}_1$-hez viszonyítva) hiányzó $\overset{1}{C}_1 x_1^{\,4}/8$ tag $\tilde{s}_2(x_3, x_1)$ alapján szintén „pótolható”.

Tehát az $\overset{1}{s}$ függvény általános alakja:

$$\overset{1}{s} = -\overset{1}{C}_1\left(\frac{x_1^{\,4}}{8} - \frac{x_1^{\,2}}{2}x_2 + \frac{x_2^{\,2}}{2}\right) - \overset{1}{C}_2 e^{\frac{x_1^{\,2}}{2} - x_2} = \overset{1}{C}_1\left(\frac{x_1^{\,2}}{2} - x_2\right)^2 / 2 - \overset{1}{C}_2 e^{\frac{x_1^{\,2}}{2} - x_2}. \tag{3.161}$$

Ellenõrzés

Mivel $\overset{1}{s}$ független x_3-tõl, ezért $f_1 = 0$.

Mivel

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{x_1^{\,4}}{8} - \frac{x_1^{\,2}}{2}x_2 + \frac{x_2^{\,2}}{2}\right) + x_1\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{x_1^{\,4}}{8} - \frac{x_1^{\,2}}{2}x_2 + \frac{x_2^{\,2}}{2}\right) = \\ &= \left(\frac{x_1^{\,3}}{2} - x_1x_2\right) + x_1\left(-\frac{x_1^{\,2}}{2} + x_2\right) = 0, \end{aligned} \tag{3.162a}$$

valamint

$$\frac{\partial}{\partial x_1} e^{\frac{x_1^{\,2}}{2} - x_2} + x_1\frac{\partial}{\partial x_2} e^{\frac{x_1^{\,2}}{2} - x_2} = x_1 e^{\frac{x_1^{\,2}}{2} - x_2} + (-1)x_1 e^{\frac{x_1^{\,2}}{2} - x_2} = 0\,, \tag{3.162b}$$

ezért $f_2 = 0$.

Végül

$$\begin{aligned} f_3 &= \frac{1}{x_3}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(-\overset{1}{C}_1\left(\frac{x_1^{\,4}}{8} - \frac{x_1^{\,2}}{2}x_2 + \frac{x_2^{\,2}}{2}\right) - \overset{1}{C}_2 e^{\frac{x_1^{\,2}}{2} - x_2}\right) = \\ &= \overset{1}{C}_1\left(\frac{x_1^{\,2}}{2} - x_2\right)/x_3 + \overset{1}{C}_2 e^{\frac{x_1^{\,2}}{2} - x_2}/x_3, \end{aligned} \tag{3.163}$$

ami azonos a kiinduló függvénnyel.

A 2. megoldás: az x_1-tõl független, azaz az $\{f_1, f_3\}$ páros az $f_2 = x_1 f_3$ feltétellel

$$f_1(x_2,x_3)=\overset{2}{F}_2(x_2)\frac{dx_3\,\overset{2}{F}_3(x_3)}{dx_3} \tag{3.30a}$$

$$f_2(x_1,x_2,x_3)=x_1\frac{d\,\overset{2}{F}_2(x_2)}{dx_2}\overset{2}{F}_3(x_3) \tag{3.30b}$$

$$f_3(x_2,x_3)=\frac{d\,\overset{2}{F}_2(x_2)}{dx_2}\overset{2}{F}_3(x_3) \tag{3.30c}$$

Integrálva (159)-et (30) alapján, nyerjük:

$$\overset{2}{s}_1=\int\left(x_3x_1\frac{d\,\overset{2}{F}_2(x_2)}{\partial d_2}\overset{2}{F}_3(x_3)-x_1x_3\frac{d\,\overset{2}{F}_2(x_2)}{dx_2}\overset{2}{F}_3(x_3)\right)dx_1=0\,, \tag{3.164a}$$

$$\overset{2}{s}_2=\int x_3\frac{d\,\overset{2}{F}_2(x_2)}{dx_2}\overset{2}{F}_3(x_3)dx_2=\overset{2}{F}_2(x_2)\cdot\overset{2}{F}_3(x_3)x_3\,, \tag{3.164b}$$

$$\overset{2}{s}_3=\int\overset{2}{F}_2(x_2)\frac{dx_3\,\overset{2}{F}_3(x_3)}{dx_3}dx_3=\overset{2}{F}_2(x_2)\cdot\overset{2}{F}_3(x_3)x_3\,. \tag{3.164c}$$

Az $\overset{2}{s}$ függvény:

$$\overset{2}{s}=\overset{2}{F}_2(x_2)\cdot\overset{2}{F}_3(x_3)x_3\,. \tag{3.165}$$

Ellenõrzés

Triviális.

A 3. megoldás: az x_2-tõl független, azaz az $\{f_1,f_2\}$ páros független az f_3-tól

Csak a nullától különbözõ függvényeket írjuk fel.

$$f_1(x_1,x_3)=\overset{3}{F}_1(x_1)\frac{dx_3\,\overset{3}{F}_3(x_3)}{dx_3}\,, \tag{3.45a}$$

$$f_2(x_1,x_3)=\frac{d\,\overset{3}{F}_1(x_1)}{dx_1}\overset{3}{F}_3(x_3)\,. \tag{3.45b}$$

Ebbõl a (159) alapján:

$$\overset{3}{s}_1=\int x_3\frac{d\,\overset{3}{F}_1(x_1)}{dx_1}\overset{3}{F}_3(x_3)dx_1=\overset{3}{F}_1(x_1)\cdot\overset{3}{F}_3(x_3)x_3\,, \tag{3.166a}$$

$$\overset{2}{s}_2=0\,, \tag{3.166b}$$

$$\overset{2}{s}_3 = \int \overset{3}{F}_1(x_1) \frac{dx_3 \overset{3}{F}_3(x_3)}{dx_3} dx_3 = \overset{3}{F}_1(x_1) \cdot \overset{3}{F}_3(x_3) x_3 . \tag{3.166c}$$

Az $\overset{3}{s}$ általános alakja

$$\overset{3}{s} = \overset{3}{F}_1(x_1) \cdot \overset{3}{F}_3(x_3) x_3 . \tag{3.167}$$

Ellenõrzés

Triviális.

A 4. megoldás: az x_3-tõl független általános megoldás

Az f_i függvények

$$f_1(x_1, x_2) = \overset{4}{F}_{12}(x_1, x_2) , \tag{3.51a}$$

$$f_2(x_1, x_2) = \frac{\partial \overset{4}{F}_{12}(x_1, x_2)}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial \overset{4}{F}_{12}(x_1, x_2)}{\partial x_2} , \tag{3.51b}$$

$$f_3(x_1, x_2) = \frac{\partial \overset{4}{F}_{12}(x_1, x_2)}{\partial x_2} . \tag{3.51c}$$

Az $\overset{4}{s}$ általános alakja

$$\overset{4}{s} = \overset{4}{F}_{12}(x_1, x_2) x_3 . \tag{3.168}$$

Ellenõrzés

Triviális.

A 4P megoldás: az x_3-tõl független partikuláris megoldás

Az f_i függvények

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) = &-\overset{4}{C}_1\left(\frac{x_1^{\ 4}}{8} - \frac{x_1^{\ 2}}{2} x_2 + \frac{x_2^{\ 2}}{2}\right) - \overset{4}{C}_2 x_1 \left(\frac{x_1^{\ 2}}{3} - x_2\right) + \overset{4}{C}_3 x_1 - \overset{4}{C}_4 \left(\frac{x_1^{\ 2}}{2} - x_2\right) + \\ &+ \overset{40}{F}_1(x_1) + \overset{41}{F}_1(x_1) e^{x_2} + e^{\frac{x_1^{\ 2}}{2}} \overset{42}{F}_2(x_2) - \overset{4}{C}_5 e^{\frac{x_1^{\ 2}}{2} - x_2} + \overset{43}{F}_1(x_1) x_2 - \int \overset{43}{F}_1(x_1) x_1 dx_1 + \overset{44}{F}_2(x_2), \end{aligned} \tag{3.122a}$$

$$f_2(x_1, x_2) = \overset{4}{C}_2 x_2 + \overset{4}{C}_3 + \frac{d \overset{40}{F}_1(x_1)}{dx_1} + \left(\overset{41}{F}_1(x_1) x_1 + \frac{d \overset{41}{F}_1(x_1)}{dx_1} \right) e^{x_2} +$$

$$+x_1 e^{\frac{x_1^2}{2}}\left(\overset{42}{F}_2(x_2)+\frac{d\,\overset{42}{F}_2(x_2)}{dx_2}\right)+\frac{d\,\overset{43}{F}_1(x_1)}{dx_1}x_2+\frac{d\,\overset{44}{F}_2(x_2)}{dx_2}x_1, \qquad (3.122b)$$

$$\begin{aligned} f_3(x_1,x_2) &= \overset{4}{C}_1\left(\frac{x_1^2}{2}-x_2\right)+\overset{4}{C}_2\,x_1+\overset{4}{C}_4+\overset{41}{F}_1(x_1)e^{x_2}+ \\ &+e^{\frac{x_1^2}{2}}\frac{d\,\overset{42}{F}_2(x_2)}{dx_2}-\overset{4}{C}_5\,e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}+\overset{43}{F}_1(x_1)+\frac{d\,\overset{44}{F}_2(x_2)}{dx_2}. \end{aligned} \qquad (3.122c)$$

Az $\overset{4P}{s}$ függvény elõállításánál szem elõtt kell tartani azt a tényt, hogy az f_1 = •$f_2 - x_1 f_3 dx_1$ függvény már majdnem maga az $\overset{4P}{s}$ függvény, a különbség mindösszesen egy x_3 szorzó. Ugyanakkor $\overset{4P}{s}_3$ függvény az f_1 függvény integrálva x_3 szerint, de mivel f_1 nem függ x_3-tõl, ezért az integrálás megegyezik egy x_3-mal való szorzással, azaz egyúttal megkapjuk az $\overset{4P}{s}$ -t is. Továbbá, igaz ugyan, hogy az $\overset{4P}{s}_2$ $x_3 f_3$ alapján áll elõ, de az éppen f_1 x_2 szerinti parciális differenciálhányadosa, amit x_2 szerint kell integrálni, azaz $x_3 f_3$ alapján is ugyanahhoz az eredményhez jutunk. Következésképpen az $\overset{4P}{s}$ függvény

$$\begin{aligned} \overset{4P}{s} &= -\overset{4}{C}_1\left(\frac{x_1^4}{8}-\frac{x_1^2}{2}x_2+\frac{x_2^2}{2}\right)x_3-\overset{4}{C}_2\,x_1\left(\frac{x_1^2}{3}-x_2\right)x_3+\overset{4}{C}_3\,x_1x_3-\overset{4}{C}_4\left(\frac{x_1^2}{2}-x_2\right)x_3+\overset{40}{F}_1(x_1)x_3+ \\ &+\overset{41}{F}_1(x_1)e^{x_2}x_3+e^{\frac{x_1^2}{2}}\overset{42}{F}_2(x_2)x_3-\overset{4}{C}_5\,e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}x_3+\overset{43}{F}_1(x_1)x_2x_3-\int\overset{43}{F}_1(x_1)x_1dx_1x_3+\overset{44}{F}_2(x_2)x_3. \end{aligned} \qquad (3.169)$$

Ellenõrzés

Triviális.

A 5. megoldás: az {f_2,f_3} páros szétválasztása az f_1 függvénytõl

Csak a nullától különbözõ függvényeket írjuk fel. Az 1. megoldás függvényét kis sem írjuk.

$$\begin{aligned} f_2(x_1,x_2,x_3) &= \left(\overset{51}{F}_1(x_1)x_1+\frac{d\,\overset{51}{F}_1(x_1)}{dx_1}\right)e^{x_2}/x_3+x_1e^{\frac{x_1^2}{2}}\left(\overset{52}{F}_2(x_2)+\frac{d\,\overset{52}{F}_2(x_2)}{dx_2}\right)/x_3+ \\ &+\frac{d\,\overset{53}{F}_1(x_1)}{dx_1}x_2/x_3+\overset{54}{F}_2(x_2)x_1/x_3, \end{aligned} \qquad (3.140b)$$

$$f_3(x_1,x_2,x_3)=\overset{51}{F}_1(x_1)e^{x_2}/x_3+e^{\frac{x_1^2}{2}}\frac{d\,\overset{52}{F}_2(x_2)}{dx_2}/x_3+\overset{53}{F}_1(x_1)/x_3+\overset{54}{F}_2(x_2)/x_3. \qquad (3.140c)$$

Ebbõl a (159) alapján (az x_3-mal már egyszerûsítettünk):

$$\overset{5}{s}_1=\int\left(\left(\overset{51}{F}_1(x_1)x_1+\frac{d\,\overset{51}{F}_1(x_1)}{dx_1}\right)e^{x_2}+x_1e^{\frac{x_1^2}{2}}\left(\overset{52}{F}_2(x_2)+\frac{d\,\overset{52}{F}_2(x_2)}{dx_2}\right)+\frac{d\,\overset{53}{F}_1(x_1)}{dx_1}x_2+\overset{54}{F}_2(x_2)x_1\right)dx_1-$$

$$-\int x_1\left(\overset{51}{F}_1(x_1)e^{x_2}+e^{\frac{x_1^2}{2}}\frac{d\,\overset{52}{F}_2(x_2)}{dx_2}+\overset{53}{F}_1(x_1)+\overset{54}{F}_2(x_2)\right)dx_1= \tag{3.170a}$$

$$=\overset{51}{F}_1(x_1)e^{x_2}+e^{\frac{x_1^2}{2}}\overset{52}{F}_2(x_2)+\overset{53}{F}_1(x_1)x_2-\int\overset{53}{F}_1(x_1)x_1dx_1,$$

$$\overset{5}{s}_2=\int\left(\overset{51}{F}_1(x_1)e^{x_2}+e^{\frac{x_1^2}{2}}\frac{d\,\overset{52}{F}_2(x_2)}{dx_2}+\overset{53}{F}_1(x_1)+\overset{54}{F}_2(x_2)\right)dx_2= \tag{3.170b}$$

$$=\overset{51}{F}_1(x_1)e^{x_2}+e^{\frac{x_1^2}{2}}\overset{52}{F}_2(x_2)+\overset{53}{F}_1(x_1)x_2+\int\overset{54}{F}_2(x_2)dx_2,$$

$$\overset{5}{s}_3=0\,. \tag{3.170c}$$

Ezután felírható az $\overset{5}{s}$ függvény

$$\overset{5}{s}=\overset{51}{F}_1(x_1)e^{x_2}+e^{\frac{x_1^2}{2}}\overset{52}{F}_2(x_2)+\overset{53}{F}_1(x_1)x_2-\int\overset{53}{F}_1(x_1)x_1dx_1+\int\overset{54}{F}_2(x_2)dx_2\,. \tag{3.171}$$

Ellenõrzés

Triviális

A 6. megoldás: az $\{f_1,f_3\}$ páros az f_2 = •x_1f_3, • • 0,1 feltétellel

$$f_1=-e^{(1-l)\frac{x_1^2}{2}-x_2}\frac{dx_3\,\overset{6l}{F}_3(x_3)}{dx_3}\,, \tag{3.155a}$$

$$f_2=l\,x_1e^{(1-l)\frac{x_1^2}{2}-x_2}\overset{6l}{F}_3(x_3)+l\,x_1\overset{6l}{C}\left((1-l)\frac{x_1^2}{2}-x_2\right)/x_3\,, \tag{3.155b}$$

$$f_3=e^{(1-l)\frac{x_1^2}{2}-x_2}\overset{6l}{F}_3(x_3)+\overset{6l}{C}\left((1-l)\frac{x_1^2}{2}-x_2\right)/x_3\,. \tag{3.155b}$$

Integrálva (159)-et, eközben kihasználjuk, hogy f_2 = •x_1f_3, valamint az x_3/x_3 kifejezést nem írjuk ki:

$$\overset{6l}{s}_1=-(1-l)\int\left(x_1e^{(1-l)\frac{x_1^2}{2}-x_2}\overset{6l}{F}_3(x_3)x_3+\overset{6l}{C}x_1\left((1-l)\frac{x_1^2}{2}-x_2\right)\right)dx_1=$$

$$= -e^{(1-l)\frac{x_1^2}{2}-x_2}\overset{6l}{F_3}(x_3)x_3 - \overset{6l}{C}\left((1-l)^2\frac{x_1^4}{8}x_2-(1-l)\frac{x_1^2}{2}x_2\right), \qquad (3.172a)$$

$$\overset{6l}{s_2} = \int e^{(1-l)\frac{x_1^2}{2}-x_2}\overset{6l}{F_3}(x_3)x_3+\overset{6l}{C}\left((1-l)\frac{x_1^2}{2}-x_2\right)dx_2 =$$

$$= -e^{(1-l)\frac{x_1^2}{2}-x_2}\overset{6l}{F_3}(x_3)x_3+\overset{6l}{C}\left((1-l)\frac{x_1^2}{2}x_2-\frac{x_2^2}{2}\right), \qquad (3.172b)$$

$$\overset{6l}{s_3} = \int -e^{(1-l)\frac{x_1^2}{2}-x_2}\frac{dx_3\overset{6l}{F_3}(x_3)}{dx_3}dx_3 = -e^{(1-l)\frac{x_1^2}{2}-x_2}\overset{6l}{F_3}(x_3)x_3. \qquad (3.172c)$$

Az $\overset{6l}{s}$ függvény:

$$\overset{6l}{s} = -e^{(1-l)\frac{x_1^2}{2}-x_2}\overset{6l}{F_3}(x_3)x_3 - \overset{6l}{C}\left((1-l)^2\frac{x_1^4}{8}x_2-(1-l)\frac{x_1^2}{2}x_2+\frac{x_2^2}{2}\right). \qquad (3.173)$$

Ellenõrzés

Triviális.

Összefoglaló táblázat

Összeállítjuk az s függvények táblázatát.

$$\overset{1}{s} = \overset{1}{C_1}\left(\frac{x_1^2}{2}-x_2\right)^2/2-\overset{1}{C_2}e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2} \qquad (3.161)$$

$$\overset{2}{s} = \overset{2}{F_2}(x_2)\cdot\overset{2}{F_3}(x_3)x_3 \qquad (3.165)$$

$$\overset{3}{s} = \overset{3}{F_1}(x_1)\cdot\overset{3}{F_3}(x_3)x_3 \qquad (3.167)$$

$$\overset{4}{s} = \overset{4}{F_{12}}(x_1,x_2)x_3 \qquad (3.168)$$

$$\overset{4P}{s} = -\overset{4}{C_1}\left(\frac{x_1^4}{8}-\frac{x_1^2}{2}x_2+\frac{x_2^2}{2}\right)x_3-\overset{4}{C_2}x_1\left(\frac{x_1^2}{3}-x_2\right)x_3+\overset{4}{C_3}x_1x_3-$$
$$-\overset{4}{C_4}\left(\frac{x_1^2}{2}-x_2\right)x_3+\overset{40}{F_1}(x_1)x_3+\overset{41}{F_1}(x_1)e^{x_2}x_3+e^{\frac{x_1^2}{2}}\overset{42}{F_2}(x_2)x_3- \qquad (3.169)$$
$$-\overset{4}{C_5}e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}x_3+\overset{43}{F_1}(x_1)x_2x_3-\int\overset{43}{F_1}(x_1)x_1dx_1x_3+\overset{44}{F_2}(x_2)x_3$$

$$\overset{5}{s} = \overset{51}{F_1}(x_1)e^{x_2}+e^{\frac{x_1^2}{2}}\overset{52}{F_2}(x_2)+\overset{53}{F_1}(x_1)x_2-\int\overset{53}{F_1}(x_1)x_1dx_1+\int\overset{54}{F_2}(x_2)dx_2 \qquad (3.171)$$

$$\overset{6l}{s}_3 = \qquad -e^{(1-l)\frac{x_1^2}{2}-x_2}\,\overset{6l}{F}_3(x_3)x_3 - \overset{6l}{C}\left((1-l)^2\frac{x_1^4}{8}x_2-(1-l)\frac{x_1^2}{2}x_2+\frac{x_2^2}{2}\right) \qquad (3.173)$$

Megjegyzések

Az $\overset{4P}{s}$ -ben az elsõ tag $\left(\frac{x_1^2}{2}-x_2\right)^2/2$, az $\overset{6l}{s}_3$ -ben az utolsó tag $\left((1-l)\frac{x_1^2}{2}-x_2\right)^2/2$ alakban is írható.

4. EGYEDI MEGOLDÁSOK AZ f_i FÜGGVÉNYEKRE

4.1. Egyargumentumú függvényekbõl álló egyedi megoldás

Keressük a (2.7-9) parciális differenciálegyenlet-rendszer általános megoldását egyargumentumú függvények összegeként, azaz legyen

$$f_1 = f_{11}(x_1) + f_{12}(x_2) + f_{13}(x_3) + c_1\,, \qquad (4.1a)$$

$$f_2 = f_{21}(x_1) + f_{22}(x_2) + f_{23}(x_3) + c_2\,, \qquad (4.1b)$$

$$f_3 = f_{31}(x_1) + f_{32}(x_2) + f_{33}(x_3) + c_3\,. \qquad (4.1c)$$

A levezetések során a függvények argumentumát nem írjuk ki, a függvények indexezése egyértelmûen megadja a függvény argumentumát.

Elõször a (2.8) egyenletbe helyettesítünk be.

$$\frac{\partial}{\partial x_3}(x_3 f_{31} + x_3 f_{32} + x_3 f_{33} + x_3 c_3) = \frac{\partial}{\partial x_2}(f_{11} + f_{12} + f_{13} + c_1)\,, \qquad (4.2)$$

ahonnét

$$f_{31} + f_{32} + \frac{dx_3 f_{33}}{dx_3} + c_3 = \frac{df_{12}}{dx_2}\,. \qquad (4.3)$$

Mivel az egyes függvények az argumentumok szerint szétválnak, ezért a különbözõ argumentumú függvényekre külön-külön egyenlet írható föl.

Mivel a konstansokat külön kiírtuk, ezért az $f_{ij} = const$, (i,j = 1,2,3) esetek a vizsgálatból kizárhatók.

A (3) egyenletbõl azonnal felírható, hogy

$$f_{31}(x_1) = 0\,. \qquad (4.4)$$

Továbbá, feltételezve, hogy $x_3 f_{33}$ x_3 -ban, és f_{12} x_2 -ben lineáris, azaz

$$f_{33}(x_3) = \overset{1}{c}_{33} + \overset{0}{c}_{33}/\,x_3\,, \tag{4.5a}$$

$$f_{12}(x_2) = c_{12}x_2\,, \tag{4.5b}$$

kapjuk, hogy

$$\overset{1}{c}_{33} + c_3 = c_{12}\,. \tag{4.6}$$

Végül felírható az alábbi összefüggés is

$$f_{32} = \frac{df_{12}}{dx_2}\,. \tag{4.7}$$

Ezeket figyelembe véve (1) az alábbi alakba írható.

$$f_1 = f_{11}(x_1) + f_{12}(x_2) + c_{12}x_2 + f_{13}(x_3) + c_1\,, \tag{4.8a}$$

$$f_2 = f_{21}(x_1) + f_{22}(x_2) + f_{23}(x_3) + c_2\,, \tag{4.8b}$$

$$f_3 = \frac{df_{12}(x_2)}{dx_2} + \overset{0}{c}_{33}/\,x_3 + c_{12}\,. \tag{4.8c}$$

Ezt behelyettesítjük (2.7)-be.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_2}(x_3 f_{21} + x_3 f_{22} + x_3 f_{23} + x_3 c_2) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_1 x_3 \frac{df_{12}}{dx_2} + x_1 \overset{0}{c}_{33} + x_1 x_3 c_{12}\right) = \\ = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_3 \frac{df_{12}}{dx_2} + \overset{0}{c}_{33} + x_3 c_{12}\right),\end{aligned} \tag{4.9}$$

ahonnét

$$x_3 \frac{df_{22}}{dx_2} - x_1 x_3 \frac{d^2 f_{12}}{dx_2^{\,2}} = 0\,. \tag{4.10}$$

A második tagban lévõ x_1 miatt a két tagnak külön-külön zérussal kell egyenlõnek lennie. Ez viszont csak akkor teljesül, ha

$$f_{22}(x_2) = 0\,, \tag{4.11}$$

és

$$f_{12}(x_2) = \overset{1}{c}_{12}\, x_2 + \overset{0}{c}_2\,. \tag{4.12}$$

A lineáris tagot (5b) alatt már meghatároztuk, és, mint említettük, a konstans tagok figyelmen kívül hagyhatók. Ezen kívül a felsõ indexek megkülönböztetõ szerepe megszûnt, ezért elhagyjuk azokat.

Ezért (8) az alábbi alakba írható.

$$f_1 = f_{11}(x_1) + c_{12}x_2 + f_{13}(x_3) + c_1 , \tag{4.13a}$$

$$f_2 = f_{21}(x_1) + f_{23}(x_3) + c_2 , \tag{4.13b}$$

$$f_3 = c_{33} / x_3 + c_{12} . \tag{4.13c}$$

Ezt behelyettesítjük (2.9)-be.

$$\frac{\partial}{\partial x_3}(x_3 f_{21} + x_3 f_{23} + x_3 c_2) - \frac{\partial}{\partial x_3}(x_1 c_{33} + x_1 x_3 c_{12}) = \frac{\partial}{\partial x_1}(f_{11} + c_{12}x_2 + f_{13} + c_1) , \tag{4.14}$$

ahonnét

$$f_{21} + \frac{dx_3 f_{23}}{dx_3} + c_2 - c_{12}x_1 = \frac{df_{11}}{dx_1} . \tag{4.15}$$

Továbbá, feltételezve, hogy $x_3 f_{23}$ x_3-ban, és f_{11} x_1-ben lineáris, azaz

$$f_{23}(x_3) = \overset{1}{c}_{23} + \overset{0}{c}_{23} / x_3 , \tag{4.16a}$$

$$f_{11}(x_1) = \overset{1}{c}_{11} x_1 , \tag{4.16b}$$

kapjuk, hogy

$$\overset{1}{c}_{23} + c_2 = \overset{1}{c}_{11} . \tag{4.17}$$

Végül (15)-ben az x_1 argumentumú függvényekre nézve fennáll az

$$f_{21} = \frac{df_{11}}{dx_1} + c_{12}x_1 \tag{4.18}$$

egyenlet.

A keresett három függvény (a szerep nélkül maradt felsõ indexeket ismételten elhagyva)

$$f_1 = f_{11}(x_1) + c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + f_{13}(x_3) + c_1 , \tag{4.19a}$$

$$f_2 = \frac{df_{11}(x_1)}{dx_1} + c_{12}x_1 + c_{23} / x_3 + c_{11} , \tag{4.19b}$$

$$f_3 = c_{33} / x_3 + c_{12} . \tag{4.19c}$$

Ellenõrzés

A bal oldalon megadjuk a vizsgált egyenlet sorszámát.

(2.7) $$\frac{\partial}{\partial x_2}(x_3 \frac{df_{11}}{dx_1} + x_3 c_{12} x_1 + c_{23} + x_3 c_{11}) - \frac{\partial}{\partial x_2}(x_1 c_{33} + x_1 x_3 c_{12}) = \frac{\partial}{\partial x_1}(c_{33} + x_3 c_{12}) , \tag{4.20}$$

ami azonosan teljesül, mivel minden tag zérus.

(2.8) $$\frac{\partial}{\partial x_3}(c_{33}+x_3c_{12})=\frac{\partial}{\partial x_2}(f_{11}+c_{11}x_1+c_{12}x_2+f_{13}+c_1)\,, \tag{4.21}$$

ami azonosan teljesül, mivel *mindkét oldalon* a c_{12} együttható kivételével minden tag zérus.

(2.9) $$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_3}(x_3\frac{df_{11}}{dx_1}+x_3c_{12}x_1+c_{23}+x_3c_{11})-\frac{\partial}{\partial x_3}(x_1c_{33}+x_1x_3c_{12})=\\=\frac{\partial}{\partial x_1}(f_{11}+c_{11}x_1+c_{12}x_2+f_{13}+c_1),\end{aligned} \tag{4.22}$$

ami azonosan teljesül, mivel *mindkét oldalon* csak az f_{11} x_1 szerinti parciális differenciálja és a c_{11} együttható különbözik zérustól.

Megjegyzés

Az $f_1=f_{13}(x_3)$ és az $f_3=c_{33}/x_3$ megegyezik a (2.13) alatti felírt integrálási szabad függvénnyel.

4.2. Egyargumentumú függvényekbõl álló egyedi megoldás figyelembe véve, hogy az f_2 és az f_3 x_3-mal van szorozva

Ebben az esetben a (2.7-9) parciális differenciálegyenlet-rendszer általános megoldását az alábbi alakban keressük:

$$f_1=f_{11}(x_1)+f_{12}(x_2)+f_{13}(x_3)+c_1\,, \tag{4.23a}$$

$$f_2=\hat{f}_{21}(x_1)/x_3+\hat{f}_{22}(x_2)/x_3+\hat{f}_{23}(x_3)/x_3+\hat{c}_2/x_3\,, \tag{4.23b}$$

$$f_3=\hat{f}_{31}(x_1)/x_3+\hat{f}_{32}(x_2)/x_3+\hat{f}_{33}(x_3)/x_3+\hat{c}_3/x_3\,. \tag{4.23c}$$

A ˆ jelzi, hogy x_3-mal osztunk.

Elsõnek a (2.8) egyenletbe helyettesítünk be.

$$\frac{\partial}{\partial x_3}(\hat{f}_{31}+\hat{f}_{32}+\hat{f}_{33}+\hat{c}_3)=\frac{\partial}{\partial x_2}(f_{11}+f_{12}+f_{13}+c_1)\,, \tag{4.24}$$

ahonnét

$$\frac{d\hat{f}_{33}}{dx_3}=\frac{df_{12}}{dx_2}\,. \tag{4.25}$$

Az argumentumok szétválása következtében azt kell feltenni, hogy a (25)-ben szereplõ két függvény argumentumainak lineáris függvénye, azaz

$$f_{12}(x_2)=c_{12}x_2\,, \tag{4.26a}$$

$$\hat{f}_{33}(x_3) = \hat{c}_{33} x_3 \,. \tag{4.26b}$$

Megjegyezzük, hogy a konstans tag, illetve konstans-per-x_3 már szerepel a (23) megoldásban, ezért (26a) és (26b) megoldásban azokat ismételten felvenni nem szükséges. Tehát (25)-bõl

$$\hat{c}_{33} = c_{12} \,. \tag{4.27}$$

Ezután (23)-at, figyelembe véve (26-27)-et, behelyettesítjük (2.7)-be.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_2}(\hat{f}_{21} + \hat{f}_{22} + \hat{f}_{23} + \hat{c}_2) - \frac{\partial}{\partial x_2}(x_1 \hat{f}_{31} + x_1 \hat{f}_{32} + x_1 \hat{c}_{33} x_3 + x_1 \hat{c}_3) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1}(\hat{f}_{31} + \hat{f}_{32} + \hat{c}_{33} x_3 + \hat{c}_3), \end{aligned} \tag{4.28}$$

ahonnét

$$\frac{d\hat{f}_{22}}{dx_2} - x_1 \frac{d\hat{f}_{32}}{dx_2} = \frac{d\hat{f}_{31}}{dx_1} \,. \tag{4.29}$$

Mivel az argumentumok szeparálódnak, így megoldást csak úgy nyerhetünk, ha a (29)-ben szereplõ függvények argumentumainak lineáris függvényei; a (26) megoldások felírása után a konstansokra tett megjegyzés itt is fennáll. Az egyes megoldások.

Ha

$$\hat{f}_{32}(x_2) = 0 \,, \tag{4.30a}$$

$$\hat{f}_{22}(x_2) = \hat{c}_{22} x_2 \,, \tag{4.30b}$$

$$\hat{f}_{31}(x_1) = \hat{c}_{31} x_1 \,, \tag{4.30c}$$

akkor

$$\hat{c}_{22} = \hat{c}_{31} \,. \tag{4.31}$$

Ha

$$\hat{f}_{22} = 0 \,, \tag{4.32a}$$

$$\hat{f}_{32}(x_2) = -\hat{c}_{32} x_2 \,, \tag{4.32b}$$

akkor

$$\frac{d\hat{f}_{31}}{dx_1} = \hat{c}_{32} x_1 \,, \tag{4.33}$$

ahonnét

$$\hat{f}_{31} = \hat{c}_{32}\frac{x_1^2}{2}. \tag{4.34}$$

Megjegyezzük, hogy ha $\hat{f}_{31} = 0$, akkor $\hat{f}_{22}$ és $\hat{f}_{32}$ is.

Ekkor (23) az alábbi formába írható.

$$f_1 = f_{11}(x_1) + \hat{c}_{33}x_2 + f_{13}(x_3) + c_1, \tag{4.35a}$$

$$f_2 = \hat{f}_{21}(x_1)/x_3 + \hat{c}_{31}x_2/x_3 + \hat{f}_{23}(x_3)/x_3 + \hat{c}_2/x_3, \tag{4.35b}$$

$$f_3 = \hat{c}_{31}x_1/x_3 + c_{32}x_1^2/2x_3 - \hat{c}_{32}x_2/x_3 + \hat{c}_{33}x_3/x_3 + \hat{c}_3/x_3. \tag{4.35c}$$

Végül a (2.9) egyenletbe helyettesítünk be.

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_3}(\hat{f}_{21} + \hat{c}_{31}x_2 + \hat{f}_{23} + \hat{c}_2) - \frac{\partial}{\partial x_3}(\hat{c}_{31}x_1^2 + c_{32}x_1^3/2 - \hat{c}_{32}x_1x_2 + \hat{c}_{33}x_1x_3 + \hat{c}_3x_1) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1}(f_{11} + \hat{c}_{33}x_2 + f_{13} + c_1),\end{aligned} \tag{4.36}$$

ahonnét

$$\frac{d\hat{f}_{23}}{dx_3} - \hat{c}_{33}x_1 = \frac{df_{11}}{dx_1}. \tag{4.37}$$

Feltételezve, hogy $\hat{f}_{23}$ x_3-ban, és f_{11} x_1-ben lineáris, azaz

$$\hat{f}_{23}(x_3) = \hat{c}_{23}x_3, \tag{4.38a}$$

$$f_{11}(x_1) = c_{11}x_1, \tag{4.38b}$$

és feltéve továbbá, hogy

$$\hat{c}_{33} = 0, \tag{4.38c}$$

kapjuk, hogy

$$\hat{c}_{23} = c_{11}. \tag{4.39}$$

Másrészt feltéve, hogy

$$\hat{f}_{23}(x_3) = 0, \tag{4.40}$$

(a konstans esetet fentebb már megvizsgáltuk), és integrálva a

$$\frac{df_{11}}{dx_1} = -\hat{c}_{33}x_1, \tag{4.41}$$

egyenletet, nyerjük

$$f_{11} = -\hat{c}_{33}x_1^2/2. \tag{4.42}$$

Így az (35) összefüggések a következõ alakot öltik (ahol az x_3/x_3 „függvényt" már nem írtuk ki).

$$f_1 = -\hat{c}_{33}x_1^2/2 + \hat{c}_{23}x_1 + \hat{c}_{33}x_2 + f_{13}(x_3) + c_1, \tag{4.43a}$$

$$f_2 = \hat{f}_{21}(x_1)/x_3 + \hat{c}_{31}x_2/x_3 + \hat{c}_{23} + \hat{c}_2/x_3, \tag{4.43b}$$

$$f_3 = \hat{c}_{31}x_1/x_3 + \hat{c}_{32}x_1^2/2x_3 - \hat{c}_{32}x_2/x_3 + \hat{c}_{33} + \hat{c}_3/x_3. \tag{4.43c}$$

Ellenõrzés

(2.7)
$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_2}(\hat{f}_{21} + \hat{c}_{31}x_2 + \hat{c}_{23}x_3 + \hat{c}_2) - \frac{\partial}{\partial x_2}(\hat{c}_{31}x_1^2 + \hat{c}_{32}x_1^3/2 - \hat{c}_{32}x_1x_2 + \hat{c}_{33}x_1x_3 + \hat{c}_3x_1) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1}(\hat{c}_{31}x_1 + \hat{c}_{32}x_1^2/2 - \hat{c}_{32}x_2 + \hat{c}_{33}x_3 + \hat{c}_3),\end{aligned} \tag{4.44}$$

ahonnét

$$\hat{c}_{31} + \hat{c}_{32}x_1 = \hat{c}_{31} + \hat{c}_{32}x_1, \tag{4.45}$$

azaz (2.7) teljesül.

(2.8)
$$\frac{\partial}{\partial x_3}(\hat{c}_{31}x_1 + \hat{c}_{32}x_1^2/2 - \hat{c}_{32}x_2 + \hat{c}_{33}x_3 + \hat{c}_3) = \frac{\partial}{\partial x_2}(-\hat{c}_{33}x_1^2/2 - \hat{c}_{23}x_1 + \hat{c}_{33}x_2 + f_{13}(x_3) + c_1), \tag{4.46}$$

ami teljesül, mert *mindkét oldalon* csak a $\hat{c}_{33}$ tag marad meg.

(2.9)
$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_3}(\hat{f}_{21} + \hat{c}_{31}x_2 + \hat{c}_{23}x_3 + \hat{c}_2) - \frac{\partial}{\partial x_3}(\hat{c}_{31}x_1^2 + \hat{c}_{32}x_1^3/2 - \hat{c}_{32}x_1x_2 + \hat{c}_{33}x_1x_3 + \hat{c}_3x_1) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1}(-\hat{c}_{33}x_1^2/2 + \hat{c}_{23}x_1 + \hat{c}_{33}x_2 + f_{13}(x_3) + c_1),\end{aligned} \tag{4.47}$$

ahonnét

$$\hat{c}_{23} - \hat{c}_{33}x_1 = -\hat{c}_{33}x_1 + \hat{c}_{23}, \tag{4.48}$$

azaz (2.9) szintén teljesül.

Megjegyzések

Az $f_1 = f_{13}(x_3)$, $f_2 = \hat{f}_{21}(x_1)/x_3$ és $f_3 = \hat{c}_3/x_3$ megegyezik a (2.13) alatti integrálási szabad függvényekkel.

Az f_2 és f_3 függvényeknek az x_3 független változóval történõ osztása helyett, vagy azzal egyidejûleg az f_1 függvényt lehetne szorozni x_3-mal (vagy tetszõleges g(x_3) függvénnyel).

Megmutatható, hogy ez az itt tárgyalt esetektõl eltérõ függvényegyenletekre vezet. (Lásd a 4.3., 4.4. pontokat, és az 5. fejezetet.)

4.3. Kétargumentumú függvényekbõl álló egyedi megoldás

Ebben az esetben a (2.7-9) parciális differenciálegyenlet-rendszer általános megoldását az alábbi alakban keressük:

$$f_1 = f_{11}(x_2, x_3) + f_{12}(x_3, x_1) + f_{13}(x_1, x_2)\,, \tag{4.49a}$$

$$f_2 = f_{21}(x_2, x_3) + f_{22}(x_3, x_1) + f_{23}(x_1, x_2)\,, \tag{4.49b}$$

$$f_3 = f_{31}(x_2, x_3) + f_{32}(x_3, x_1) + f_{33}(x_1, x_2)\,. \tag{4.49c}$$

Elsõnek a (2.8) egyenletbe helyettesítünk be.

$$\frac{\partial x_3 f_{31}(x_2, x_3)}{\partial x_3} + \frac{\partial x_3 f_{32}(x_3, x_1)}{\partial x_3} + f_{33}(x_1, x_2) = \frac{\partial f_{11}(x_2, x_3)}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{13}(x_1, x_2)}{\partial x_2}\,. \tag{4.50}$$

Az argumentumok szétválasztásával az alábbi egyenleteket nyerjük.

(x_2,x_3)
$$\frac{\partial x_3 f_{31}(x_2, x_3)}{\partial x_3} = \frac{\partial f_{11}(x_2, x_3)}{\partial x_2}\,, \tag{4.51}$$

(x_1,x_2)
$$f_{33}(x_1, x_2) = \frac{\partial f_{13}(x_1, x_2)}{\partial x_2}\,, \tag{4.52}$$

(x_1,x_3)
$$\frac{\partial x_3 f_{32}(x_3, x_1)}{\partial x_3} = 0\,, \tag{4.53}$$

az utolsót integrálva

$$f_{32}(x_3, x_1) = F_{32}(x_1)/x_3\,. \tag{4.54}$$

Ezek figyelembe vételével

$$f_3 = f_{31}(x_2, x_3) + F_{32}(x_1)/x_3 + \frac{\partial f_{13}(x_1, x_2)}{\partial x_2}\,. \tag{4.55}$$

A (50) egyenletnek a kétargumentumú függvényeken kívül lehetnek egyargumentumú megoldásai is. Ezek az alábbi szerkezetûek lehetnek.

A (50) egyenletben szereplõ függvények csak az egy x_1 argumentumtól függenek. Ennek feltétele, hogy az

$$f_{32}(x_3, x_1) = \overset{1}{f}_{32}(x_1)\,, \tag{4.56a}$$

$$f_{33}(x_1, x_2) = \overset{1}{f}_{33}(x_1)\,, \tag{4.56b}$$

$$f_{13}(x_1,x_2)=\overset{1}{f}_{13}(x_1)x_2\,, \tag{4.56c}$$

választással éljünk, illetve a két további függvény legyen zérussal egyenlõ. Ekkor fennáll az alábbi összefüggés:

$$\overset{1}{f}_{32}(x_1)+\overset{1}{f}_{33}(x_1)=\overset{1}{f}_{3}(x_1)=\overset{1}{f}_{13}(x_1)\,, \tag{4.57}$$

ahol bevezettük az $\overset{1}{f}_{3}(x_1)$ függvényt.

A (50) egyenletben szereplõ függvények csak az egy x_2 argumentumtól függenek. Ennek feltétele, hogy az

$$f_{31}(x_2,x_3)=\overset{2}{f}_{31}(x_2)\,, \tag{4.58a}$$

$$f_{33}(x_1,x_2)=\overset{2}{f}_{33}(x_2)\,, \tag{4.58b}$$

$$f_{11}(x_2,x_3)=\overset{2}{f}_{11}(x_2)\,, \tag{4.58c}$$

$$f_{13}(x_1,x_2)=\overset{2}{f}_{13}(x_2) \tag{4.58d}$$

választással éljünk, valamint a további egy függvény legyen zérussal egyenlõ. Ekkor fennáll az alábbi összefüggés:

$$\overset{2}{f}_{31}(x_2)+\overset{2}{f}_{33}(x_2)=\frac{d}{dx_2}\left(\overset{2}{f}_{11}(x_2)+\overset{2}{f}_{13}(x_2)\right). \tag{4.59}$$

Látható, hogy az általánosság megsértése nélkül bevezethetõ két új függvény, úgymint $\overset{2}{f}_{3}(x_2)$, és $\overset{2}{f}_{1}(x_2)$, amelyekre teljesül az

$$\overset{2}{f}_{3}(x_2)=\frac{d\,\overset{2}{f}_{1}(x_2)}{dx_2} \tag{4.60}$$

összefüggés.

A (50) egyenletben szereplõ függvények csak az egy x_3 argumentumtól függenek. Ennek feltétele, hogy

$$f_{31}(x_2,x_3)=\overset{3}{f}_{31}(x_3)\,, \tag{4.61a}$$

$$f_{32}(x_3,x_1)=\overset{3}{f}_{32}(x_3)\,, \tag{4.61b}$$

$$f_{11}(x_2,x_3)=\overset{3}{f}_{11}(x_3)x_2 \tag{4.61c}$$

választással éljünk, illetve a két további függvény legyen zérussal egyenlõ. Ekkor fennáll az alábbi összefüggés.

$$\frac{dx_3\,\overset{3}{f}_{31}(x_3)}{dx_3}+\frac{dx_3\,\overset{3}{f}_{32}(x_3)}{dx_3}=\frac{dx_3\,\overset{3}{f}_{3}(x_3)}{dx_3}=\overset{3}{f}_{11}(x_3)\,, \tag{4.62}$$

ahol bevezettük az $\overset{3}{f}_3(x_3)$ függvényt.

Az egyargumentumosra vezetõ egyedi megoldásokat (is) figyelembe véve felírjuk a (49) összefüggéseket.

$$f_1=f_{11}(x_2,x_3)+f_{12}(x_3,x_1)+f_{13}(x_1,x_2)+\overset{1}{f}_{13}(x_1)x_2+\overset{2}{f}_{1}(x_2)+\frac{dx_3\,\overset{3}{f}_3(x_3)}{dx_3}x_2\,, \tag{4.63a}$$

$$f_2=f_{21}(x_2,x_3)+f_{22}(x_3,x_1)+f_{23}(x_1,x_2)\,, \tag{4.63b}$$

$$f_3=f_{31}(x_2,x_3)+F_{32}(x_1)/x_3+\frac{\partial f_{13}(x_1,x_2)}{\partial x_2}+\overset{1}{f}_{13}(x_1)+\frac{d\,\overset{2}{f}_1(x_2)}{dx_2}+\overset{3}{f}_3(x_3)\,. \tag{4.63c}$$

Tekintsük a (2.7) egyenletet.

$$\begin{aligned}&\frac{\partial x_3 f_{21}(x_2,x_3)}{\partial x_2}+\frac{\partial x_3 f_{23}(x_1,x_2)}{\partial x_2}-\frac{\partial x_1x_3 f_{31}(x_2,x_3)}{\partial x_2}-\frac{\partial^2 x_1x_3 f_{13}(x_1,x_2)}{\partial {x_2}^2}-\\&-x_1x_3\frac{d^2\,\overset{2}{f}_1(x_2)}{d{x_2}^2}=\frac{dF_{32}(x_1)}{dx_1}+\frac{\partial^2 x_3 f_{13}(x_1,x_2)}{\partial x_1\partial x_2}+x_3\frac{d\,\overset{1}{f}_{13}(x_1)}{dx_1}.\end{aligned} \tag{4.64}$$

Ezt, az argumentumokat szétválasztva, az alábbi egyenletekre bonthatjuk. (Az elsõben x_3-mal már egyszerûsítettünk)

$x_3{\cdot}(x_1,x_2)$
$$\frac{\partial f_{23}(x_1,x_2)}{\partial x_2}-\frac{\partial^2 x_1 f_{13}(x_1,x_2)}{\partial {x_2}^2}-x_1\frac{d^2\,\overset{2}{f}_1(x_2)}{d{x_2}^2}=\frac{\partial^2 f_{13}(x_1,x_2)}{\partial x_1\partial x_2}\,, \tag{4.65}$$

(x_1,x_2,x_3)
$$\begin{aligned}&\frac{\partial x_3 f_{23}(x_1,x_2)}{\partial x_2}-\frac{\partial x_1x_3 f_{31}(x_2,x_3)}{\partial x_2}-\frac{\partial^2 x_1x_3 f_{13}(x_1,x_2)}{\partial {x_2}^2}-\\&-x_1x_3\frac{d^2\,\overset{2}{f}_1(x_2)}{d{x_2}^2}=\frac{\partial^2 x_3 f_{13}(x_1,x_2)}{\partial x_1\partial x_2}\,,\end{aligned} \tag{4.66}$$

(x_2,x_3)
$$\frac{\partial x_3 f_{21}(x_2,x_3)}{\partial x_2}=0\,, \tag{4.67}$$

(x_1)
$$\frac{dF_{32}(x_1)}{dx_1}=0\,, \tag{4.68}$$

$x_3 \cdot (x_1)$ $$x_3 \frac{d \overset{1}{f}_{13}(x_1)}{dx_1} = 0\,. \tag{4.69}$$

A (65) egyenlet x_2 szerint integrálható. Ekkor az alábbi összefüggést nyerjük.

$$f_{23}(x_1, x_2) = \frac{\partial f_{13}(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{13}(x_1, x_2)}{\partial x_2} x_1 + \frac{d \overset{2}{f}_1(x_2)}{dx_2} x_1 + \overset{1}{f}_{23}(x_1)\,. \tag{4.70}$$

Megjegyzés: amennyiben a (70) egyenletet megoldjuk az f_{13} függvényre, akkor jutunk a 3. fejezetben levezetett 4. megoldás partikuláris, illetve annak integrálalakos megoldásához.

A (66) összefüggésben x_3-mal egyszerûsítünk.

$$\frac{\partial f_{23}(x_1, x_2)}{\partial x_2} - \frac{\partial x_1 f_{31}(x_2, x_3)}{\partial x_2} - \frac{\partial^2 x_1 f_{13}(x_1, x_2)}{\partial x_2{}^2} - \frac{d^2 \overset{2}{f}_1(x_2)}{dx_2{}^2} x_1 = \frac{\partial^2 f_{13}(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}. \tag{4.71}$$

Összevetve (65)-tel az alábbi összefüggés marad

$$\frac{\partial x_1 f_{31}(x_2, x_3)}{\partial x_2} = 0\,, \tag{4.72}$$

amelyet integrálunk,

$$f_{31}(x_2, x_3) = F_{31}(x_3)\,. \tag{4.73}$$

Az utolsó három, (67-69), egyenlet integrálható.

$$f_{21}(x_2, x_3) = F_{21}(x_3)\,, \tag{4.74}$$

$$F_{32}(x_1) = c_{32}\,, \tag{4.75}$$

$$\overset{1}{f}_{13}(x_1) = \overset{1}{c}_{13}\,. \tag{4.76}$$

A továbbiakban tekintsük a csökkentett argumentumú megoldásokat. Az alatt azt értjük, hogy a differenciálás miatt, ha a függvény az adott argumentumban lineáris, a (64) egyenletben szereplõ egyik, vagy másik kifejezésben csökkenhet az argumentumok száma. Ezzel analóg módon, a függvény elõtti argumentumszorzó is csökkentheti eggyel a kifejezés argumentumainak számát, ha az összefüggés reciprok, illetve akkor, amikor valamely argumentum nem is szerepel a függvényben. Végül tekinthetjük azt az esetet is, amikor az „x_1x_3” kifejezéssel szorzott függvények csak x_2-tõl függenek. Ezeket a függvényeket *-gal jelöltük. (Az (58d) esetén bevezetett $\overset{2}{f}_{13}$ már szerepel a (64) egyenletben.) Részletezve.

$$\tilde{f}_{21}(x_2,x_3) = \overset{5}{f}_{21}(x_2) + \overset{6}{f}_{21}(x_3)x_2 + \overset{7}{f}_{21}(x_2)/x_3\,, \tag{4.77}$$

$$\tilde{f}_{23}(x_1,x_2) = \overset{4}{f}_{23}(x_1)x_2 + \overset{5}{f}_{23}(x_2)\,, \tag{4.78}$$

$$\tilde{f}_{31}(x_2,x_3) = \overset{5}{f}_{31}(x_2)^* + \overset{6}{f}_{31}(x_3)x_2 + \overset{7}{f}_{31}(x_2)/x_3 - \overset{1}{c}_{31}\,x_2/x_3\,, \tag{4.79}$$

$$\tilde{f}_{13}(x_1,x_2) = \overset{7}{f}_{13}(x_1)x_2^{\,2}/2 + \overset{5}{f}_{13}(x_2)/x_1\,, \tag{4.80a}$$

$$\overset{2}{\tilde{f}}_1(x_2) = \overset{2}{c}_1\,x_2^{\,2}/2\,, \tag{4.81}$$

$$\tilde{F}_{32}(x_1) = \overset{1}{c}_{32}\,x_1\,, \tag{4.82}$$

$$\tilde{f}_{13}(x_1,x_2) = \overset{4}{f}_{13}(x_1)x_2 + \overset{8}{f}_{13}(x_2)x_1 + \overset{9}{f}_{13}(x_2)^*\,x_1^{\,2}/2 + \overset{3}{c}_{13}\,x_1x_2\,, \tag{4.80b}$$

$$\overset{1}{\tilde{f}}_{13}(x_1) = \overset{2}{c}_{13}\,x_1\,. \tag{4.83}$$

Mivel az f_{13} függvénynek két különbözõ differenciálkifejezése szerepel a (64) egyenletben, ezért két összefüggést kapunk, ezek a (80a) és a (80b). Mivel a cél az argumentumok számának csökkentése, és nem egy-egy partikuláris megoldás elõállítása, ezért a kétféle felbontásból csak azokat tartjuk meg, amelyek mindkét kifejezésben csökkentik az argumentumok számát. Ez a gyakorlatban azt jelenti, hogy az egyik kifejezésben csökkenti az argumentumok számát, a másikban pedig nem szerepel. Ezt figyelembe véve a $\tilde{f}_{13}$ függvényt az alábbi kifejezéssel adjuk meg:

$$\tilde{f}_{13}(x_1,x_2) = \overset{4}{f}_{13}(x_1)x_2 + \overset{3}{c}_{13}\,x_1x_2\,. \tag{4.84}$$

Végül tekintetbe kell venni, hogy a (2.8) egyenlet integrálásakor, lásd az (50) összefüggést, az f_{13} és az f_{31} függvényekre már bevezettünk néhány csökkentett argumentumú függvényt, ezeket az (56c), illetve az (58a) összefüggések tartalmazzák. Következésképpen, ezeket a tagokat itt ismételten megjeleníteni nem szükséges, azokat törüljük a (80), illetve a (79) kifejezésekbõl. Továbbá a (63a,c) kifejezésbõl látható, hogy az x_2 szerinti szorzás, illetve deriválás miatt (84) utolsó kifejezése megegyezik a (83) alatt felvett függvénnyel. Ezért az elõbbi elhagyható. Következésképpen

$$\tilde{f}_{13}(x_1,x_2) = 0\,, \tag{4.85}$$

$$\tilde{f}_{31}(x_2,x_3) = \overset{6}{f}_{31}(x_3)x_2 + \overset{7}{f}_{31}(x_2)/x_3 - \overset{1}{c}_{31}\,x_2/x_3\,. \tag{4.86}$$

Ezen kívül figyelembe kell venni, hogy az f_{21} és az f_{23} függvényekre ugyanazon x_2

argumentumtól függõ függvényt vezettük, be, az egyikben elhagyható, a másikban módosítjuk a jelölését. Tehát

$$\tilde{f}_{21}(x_2,x_3)=\overset{5}{f}_2(x_2)+\overset{6}{f}_{21}(x_3)x_2+\overset{7}{f}_{21}(x_2)/x_3\,, \tag{4.87}$$

$$\tilde{f}_{23}(x_1,x_2)=\overset{4}{f}_{23}(x_1)x_2\,. \tag{4.88}$$

A fenti függvények bevezetésével az f_i függvények (63) alatti alakja a következõ:

$$\begin{aligned} f_1 &= f_{11}(x_2,x_3)+f_{12}(x_3,x_1)+f_{13}(x_1,x_2)+\overset{1}{f}_{13}(x_1)x_2+\overset{2}{f}_1(x_2)+\frac{dx_3\,\overset{3}{f}_3(x_3)}{dx_3}x_2+\\ &+\overset{2}{c}_{13}\,x_1x_2+\overset{2}{c}_1\,x_2{}^2/2, \end{aligned} \tag{4.89a}$$

$$\begin{aligned} f_2 &= f_{21}(x_2,x_3)+f_{22}(x_3,x_1)+f_{23}(x_1,x_2)+\\ &+\overset{5}{f}_2(x_2)+\overset{6}{f}_{21}(x_3)x_2+\overset{7}{f}_{21}(x_2)/x_3+\overset{4}{f}_{23}(x_1)x_2, \end{aligned} \tag{4.89b}$$

$$\begin{aligned} f_3 &= f_{31}(x_2,x_3)+F_{32}(x_1)/x_3+\frac{\partial f_{13}(x_1,x_2)}{\partial x_2}+\overset{1}{f}_{13}(x_1)+\frac{d\,\overset{2}{f}_1(x_2)}{dx_2}+\overset{3}{f}_3(x_3)+\\ &+\overset{6}{f}_{31}(x_3)x_2+\overset{7}{f}_{31}(x_2)/x_3-\overset{1}{c}_{31}\,x_2/x_3+\overset{2}{c}_1\,x_2+\overset{2}{c}_{13}\,x_1+\overset{1}{c}_{32}\,x_1/x_3. \end{aligned} \tag{4.89c}$$

A fenti függvények bevezetésével a (2.7) egyenlet (64) alatti alakja a következõ:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial x_3 f_{21}(x_2,x_3)}{\partial x_2}+\frac{d\,\overset{5}{f}_2(x_2)}{dx_2}x_3+x_3\,\overset{6}{f}_{21}(x_3)+\frac{d\,\overset{7}{f}_{21}(x_2)}{dx_2}+\\ &+\frac{\partial x_3 f_{23}(x_1,x_2)}{\partial x_2}+x_3\,\overset{4}{f}_{23}(x_1)-\\ &-\frac{\partial x_1x_3 f_{31}(x_2,x_3)}{\partial x_2}-x_1x_3\,\overset{6}{f}_{31}(x_3)-\frac{d\,\overset{7}{f}_{31}(x_2)}{dx_2}x_1+\overset{1}{c}_{31}\,x_1-\\ &-\frac{\partial^2 x_1x_3 f_{13}(x_1,x_2)}{\partial x_2{}^2}-x_1x_3\frac{d^2\,\overset{2}{f}_1(x_2)}{dx_2{}^2}-\overset{2}{c}_1\,x_1x_3=\\ &=\frac{dF_{32}(x_1)}{dx_1}+\frac{\partial^2 x_3 f_{13}(x_1,x_2)}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{d\,\overset{1}{f}_{13}(x_1)}{dx_1}x_3+\overset{2}{c}_{13}\,x_3+\overset{1}{c}_{32}\,. \end{aligned} \tag{4.90}$$

A (90) egyenletbõl a (65-69) feltétektõl eltérõ feltételek a következõk.

$x_1\cdot(x_2)$

$$x_1\frac{d\,\overset{7}{f}_{31}(x_2)}{dx_2}=0\,, \tag{4.91}$$

(x_1,x_3)
$$x_3 \overset{4}{f}_{23}(x_1) - x_1 x_3 \overset{6}{f}_{31}(x_3) - \overset{2}{c}_1 x_1 x_3 = x_3 \frac{d \overset{1}{f}_{13}(x_1)}{dx_1}, \tag{4.92}$$

(x_2,x_3)
$$x_3 \frac{d \overset{5}{f}_2(x_2)}{dx_2} = 0, \tag{4.93}$$

(x_1)
$$\overset{1}{c}_{31} x_1 = \frac{dF_{32}(x_1)}{dx_1}, \tag{4.94}$$

(x_2)
$$\frac{d \overset{7}{f}_{21}(x_2)}{dx_2} = 0, \tag{4.95}$$

(x_3)
$$x_3 \overset{6}{f}_{21}(x_3) = \overset{2}{c}_{13} x_3, \tag{4.96}$$

(c)
$$\overset{1}{c}_{32} = 0. \tag{4.97}$$

A (91-97) egyenletek alapvetõen függetlenek a korábban levezetett (65-69) összefüggésektõl. A (93) összefüggés $x_3 \cdot (x_2)$ szerkezete mutatja, hogy (67)-tõl független, hiszen x_3 kiemelése után az argumentumok szerkezete különbözõ. (Az is meg kell jegyezni, hogy (93) (67) származéka.) Megemlítjük, hogy néhány további argumentum-csökkentéssel, mint pl. (91)-ben, vagy (69)-ben újabb feltételi egyenletek nyerhetõk, az elsõ példában (68)-hoz, a másodikban (96)-hoz lehet csatolni az említett kifejezéseket, de az egyargumentumú esetet korábban megvizsgáltuk, ezért ezeket itt már részleteiben nem vizsgáljuk.

Átalakítjuk, illetve integráljuk a (91-96) alatti egyenleteket.

$$\overset{7}{f}_{31}(x_2) = \overset{7}{c}_{31}. \tag{4.98}$$

A (92) egyenletben az x_3 kiemelése után látható, hogy az argumentumokban a szétválasztás csak úgy tehetõ meg, ha

$$\overset{6}{f}_{31}(x_3) = \overset{6}{c}_{31}, \tag{4.99}$$

ekkor a két ismeretlen függvénybõl az egyik kifejezhetõ a másikkal, azaz pl.

$$\overset{4}{f}_{23}(x_1) = \frac{d \overset{1}{f}_{13}(x_1)}{dx_1} + (\overset{6}{c}_{31} + \overset{2}{c}_1) x_1. \tag{4.100}$$

Továbbá

$$\overset{5}{f}_2(x_2) = \overset{5}{c}_2, \tag{4.101}$$

$$F_{32}(x_1) = \overset{1}{c}_{31} x_1^2 / 2, \tag{4.102}$$

$$\overset{7}{f}_{21}(x_2) = \overset{7}{c}_{21}\,, \tag{4.103}$$

$$\overset{6}{f}_{21}(x_3) = \overset{2}{c}_{13}\,. \tag{4.104}$$

Mielõtt az (2.7) integrálásával nyert összefüggések segítségével felírnók a (63) alatti függvényeket, rá kell arra mutatni, hogy a (73) értelmében az (51) feltételi egyenletet ismételten meg kell vizsgálni:

$$\frac{dx_3 F_{31}(x_3)}{dx_3} = \frac{\partial f_{11}(x_2, x_3)}{\partial x_2}\,, \tag{4.105}$$

ezért az f_{11} függvény

$$f_{11}(x_2, x_3) = F_{11}(x_3) + \overset{3}{f}_{11}(x_3)x_2 \tag{4.106}$$

szerkezetû kell, hogy legyen. Itt a már a (61c) alatt bevezetett függvényt is feltüntettük.

Megjegyezzük továbbá, hogy a (72) integrálásával kapott F_{31} függvény megegyezik a (61a,b) alatt bevezetett függvénnyel. Ez utóbbit tartjuk meg, az elsõt, mint ismétlést nem vesszük figyelembe, formálisan

$$F_{31}(x_3) = 0\,. \tag{4.107}$$

A (89) alatti függvények, figyelembe véve (70-76) megoldásokat, a (77-83) alatt bevezetett csökkentett argumentumú függvényekre kapott (97-104) összefüggéseket, valamint (105-107)-et, az alábbi alakba írhatók.

$$\begin{aligned} f_1 = {} & F_{11}(x_3) + f_{12}(x_3, x_1) + f_{13}(x_1, x_2) + \overset{1}{f}_{13}(x_1)x_2 + \overset{2}{f}_1(x_2) + \frac{dx_3\, \overset{3}{f}_3(x_3)}{dx_3} x_2 + \\ & + \overset{2}{c}_{13}\, x_1 x_2 + \overset{2}{c}_1\, x_2^2/2 + \overset{1}{c}_{13}\, x_2\,, \end{aligned} \tag{4.108a}$$

$$\begin{aligned} f_2 = {} & F_{21}(x_3) + f_{22}(x_3, x_1) + \frac{\partial f_{13}(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{13}(x_1, x_2)}{\partial x_2} x_1 + \frac{d\, \overset{2}{f}_1(x_2)}{dx_2} x_1 + \\ & + \overset{1}{f}_{23}(x_1) + \frac{d\, \overset{1}{f}_{13}(x_1)}{dx_1} x_2 + (\overset{6}{c}_{31} + \overset{2}{c}_1)x_1 x_2 + \overset{2}{c}_{13}\, x_2 + \overset{7}{c}_{21}/\, x_3 + \overset{5}{c}_2\,, \end{aligned} \tag{4.108b}$$

$$\begin{aligned} f_3 = {} & \frac{\partial f_{13}(x_1, x_2)}{\partial x_2} + \overset{1}{f}_{13}(x_1) + \frac{d\, \overset{2}{f}_1(x_2)}{dx_2} + \overset{3}{f}_3(x_3) + \\ & + \overset{2}{c}_{13}\, x_1 + (\overset{6}{c}_{31} + \overset{2}{c}_1)x_2 + \overset{1}{c}_{31}\left(\frac{x_1^2}{2} - x_2\right)/\, x_3 + \overset{7}{c}_{31}/\, x_3 + c_{32}\,/\, x_3 + \overset{1}{c}_{13}\,. \end{aligned} \tag{4.108c}$$

A továbbiakban a (2.9) egyenletet vizsgáljuk meg.

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx_3 F_{21}(x_3)}{dx_3} + \frac{\partial x_3 f_{22}(x_3,x_1)}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{13}(x_1,x_2)}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial f_{13}(x_1,x_2)}{\partial x_2} + \overset{1}{f}_{23}(x_1) + \\
&+ x_1 \frac{d\,\overset{2}{f}_1(x_2)}{dx_2} + \frac{d\,\overset{1}{f}_{13}(x_1)}{dx_1} x_2 + (\overset{6}{c}_{31} + \overset{2}{c}_1) x_1 x_2 + \overset{2}{c}_{13}\, x_2 + \overset{5}{c}_2 - x_1 \frac{\partial f_{13}(x_1,x_2)}{\partial x_2} - \\
&- x_1\, \overset{1}{f}_{13}(x_1) - x_1 \frac{d\,\overset{2}{f}_1(x_2)}{dx_2} - x_1 \frac{dx_3\, \overset{3}{f}_3(x_3)}{dx_3} - \overset{2}{c}_{13}\, x_1^{\,2} - (\overset{6}{c}_{31} + \overset{2}{c}_1) x_1 x_2 - \\
&- \overset{1}{c}_{13}\, x_1 = \frac{\partial f_{12}(x_3,x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{13}(x_1,x_2)}{\partial x_1} + \frac{d\,\overset{1}{f}_{13}(x_1)}{dx_1} x_2 + \overset{2}{c}_{13}\, x_2 .
\end{aligned}
\tag{4.109}
$$

Az argumentumok szétválasztásával az alábbi összefüggéseket nyerjük.

(x_1,x_3)
$$\frac{\partial x_3 f_{22}(x_3,x_1)}{\partial x_3} - x_1 \frac{dx_3\, \overset{3}{f}_3(x_3)}{dx_3} = \frac{\partial f_{12}(x_3,x_1)}{\partial x_1}, \tag{4.110}$$

(x_1)
$$\overset{1}{f}_{23}(x_1) - x_1\, \overset{1}{f}_{13}(x_1) - \overset{2}{c}_{13}\, x_1^{\,2} - \overset{1}{c}_{13}\, x_1 = 0, \tag{4.111}$$

(x_3)
$$\frac{dx_3 F_{21}(x_3)}{dx_3} = 0, \tag{4.112}$$

(c)
$$\overset{5}{c}_2 = 0. \tag{4.113}$$

Elsõnek a (110) összefüggést vizsgáljuk. A kétargumentumos függvények szerkezetére az alábbi feltevéseket téve,

$$f_{22}(x_3,x_1) = \overset{2}{f}_{22}(x_3) x_1, \tag{4.114a}$$

$$f_{12}(x_3,x_1) = \overset{3}{f}_{12}(x_3) \frac{x_1^{\,2}}{2}, \tag{4.114b}$$

nyerjük

$$\frac{dx_3\, \overset{2}{f}_{22}(x_3)}{dx_3} - \frac{dx_3\, \overset{3}{f}_3(x_3)}{dx_3} = \overset{3}{f}_{12}(x_3). \tag{4.115}$$

Ezt a megoldást úgy tekinthetjük, hogy a (110) egyenletbõl a $\overset{3}{f}_3(x_3)$ függvényt „kiküszöböltük”. Következésképpen ezen kívül az alábbi egyenletet kell megoldani:

$$\frac{\partial x_3 f_{22}(x_3,x_1)}{\partial x_3} = \frac{\partial f_{12}(x_3,x_1)}{\partial x_1}. \tag{4.116}$$

Ez megegyezik a (3.34c) egyenlettel, amelynek a megoldását a (3.45a,b) tartalmazza. Ez összeg- és szorzatalakot is magába foglal.

Tekintsük az összegalakú megoldáshoz választandó egyargumentumos függvényeket, amelyek, értelemszerûen, x_1 és x_3 változóktól függnek. Mivel a (109) egyenletben vannak, illetve lehetnek ilyen típusú, más „származék” tagok, ezért ezeket nem lehet csak a (116) vizsgálatával meghatározni. A teljes vizsgálatot késõbbre halasztjuk.

A (116), azaz (3.34c) egyenlet szorzatalakú megoldása – (3.45a,b) alapján – a következõ:

$$f_{12}(x_3, x_1) = \overset{3}{F_1}(x_1)\frac{dx_3 \overset{3}{F_3}(x_3)}{dx_3} + \overset{0}{F_1}(x_1)\,, \tag{4.117a}$$

$$f_{22}(x_3, x_1) = \frac{d\,\overset{3}{F_1}(x_1)}{dx_1}\overset{3}{F_3}(x_3) + \overset{0}{F_1}(x_1)/x_3\,. \tag{4.117b}$$

A következõ kettõ egyenletbõl a (111) átrendezhetõ, a (112) integrálható. Kapjuk.

$$\overset{1}{f_{23}}(x_1) = \overset{1}{f_{13}}(x_1)x_1 + \overset{2}{c_{13}}\, x_1^{\,2} + \overset{1}{c_{13}}\, x_1\,, \tag{4.118}$$

$$F_{21}(x_3) = c_{21}/x_3\,. \tag{4.119}$$

A továbbiakban a csökkentett argumentumú megoldásokat határozzuk meg.

Elsõnek az x_1-t tartalmazó megoldásokat vizsgáljuk.

A következõ három feltevéssel élhetünk:

$$f_{22}(x_3, x_1) = \overset{1}{f_{22}}(x_1)\,, \tag{4.120a}$$

$$\overset{3}{f_3}(x_3) = \overset{3}{c_3}\,, \tag{4.120b}$$

$$f_{12}(x_3, x_1) = \overset{1}{f_{12}}(x_1)\,. \tag{4.120c}$$

Mivel $f_{23}(x_1, x_2)$-nek a csak x_1-et tartalmazó származék függvényét már „felvettük $\overset{1}{f_{23}}(x_1)$ alakban, ezért (120a) alatti függvény ezzel megegyezik. A továbbiakban a kettõ helyett egyet, a $\overset{1}{f_2}(x_1)$ jelölésben, alkalmazzuk. A jelölés egysége végett a (120c) összefüggésben az egyargumentumú függvény „12” alsó indexét „1”-re cseréljük.

Ekkor (109)-bõl, figyelembe véve (120)-at, (111) helyett kapjuk.

$$\overset{1}{f_2}(x_1) - \overset{1}{f_{13}}(x_1)x_1 - \overset{2}{c_{13}}\, x_1^{\,2} - \overset{3}{c_3}\, x_1 - \overset{1}{c_{13}}\, x_1 = \frac{d\,\overset{1}{f_1}(x_1)}{dx_1}\,. \tag{4.121}$$

Összevetve (118)-cal látható, hogy az (121) a teljesebb, ezért az alábbi összefüggést alkalmazzuk a továbbiakban.

$$\overset{1}{f}_2(x_1) = \frac{d\,\overset{1}{f}_1(x_1)}{dx_1} + \overset{1}{f}_{13}(x_1)x_1 + \overset{2}{c}_{13}\, x_1^2 + \overset{3}{c}_3\, x_1 + \overset{1}{c}_{13}\, x_1 . \tag{4.122}$$

Másodiknak az x_3-t tartalmazó megoldásokat vizsgáljuk. (Megjegyezzük csak x_2-öt tartalmazó megoldás nem létezik.)

Itt két feltevést tehetünk (bár valójában három kell).

$$f_{22}(x_3, x_1) = \overset{4}{f}_{22}(x_3)\,, \tag{4.123a}$$

$$f_{12}(x_3, x_1) = \overset{4}{f}_{12}(x_3)x_1\,. \tag{4.123b}$$

$$\overset{3}{f}_3(x_3) = 0\,. \tag{4.123c}$$

A feltételi egyenlet (109)-bõl, figyelembe véve (123)-at, így (112) helyett kapjuk:

$$\frac{dx_3 F_{21}(x_3)}{dx_3} + \frac{dx_3\, \overset{4}{f}_{22}(x_3)}{dx_3} = \overset{4}{f}_{12}(x_3)\,. \tag{4.124}$$

Mivel az $F_{21}(x_3)$ és az $\overset{4}{f}_{22}(x_3)$ függvények ugyanazon f_2 függvényhez tartoznak, ezért a kettõbõl az egyik felesleges. Mi az utóbbit tartjuk meg.

Figyelembe véve a (109) egyenlet integrálásával nyert megoldásokat, a (108) az alábbi alakot ölti. (A 3. megoldást csak a $\overset{3}{\mathrm{F}}_i$ (i = 1,2) alakban adjuk meg.)

$$\begin{aligned} f_1 = {} & F_{11}(x_3) + \frac{dx_3\, \overset{2}{f}_{22}(x_3)}{dx_3}\,\frac{x_1^2}{2} + \overset{3}{\mathrm{F}}_1 + f_{13}(x_1, x_2) + \overset{1}{f}_{13}(x_1)x_2 + \\ & + \overset{1}{f}_1(x_1) + \overset{2}{f}_1(x_2) - \frac{dx_3\, \overset{3}{f}_3(x_3)}{dx_3}\left(\frac{x_1^2}{2} - x_2\right) + \frac{dx_3\, \overset{4}{f}_{22}(x_3)}{dx_3}\,x_1 + \\ & + \overset{2}{c}_{13}\, x_1 x_2 + \overset{2}{c}_1 \frac{x_2^2}{2} + (\overset{3}{c}_3 + \overset{1}{c}_{13})x_2\,, \end{aligned} \tag{4.125a}$$

$$\begin{aligned} f_2 = {} & \frac{\partial f_{13}(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{13}(x_1, x_2)}{\partial x_2}\,x_1 + \overset{1}{f}_{13}(x_1)x_1 + \frac{d\, \overset{1}{f}_{13}(x_1)}{dx_1}\,x_2 + \\ & + \frac{d\, \overset{1}{f}_1(x_1)}{dx_1} + \frac{d\, \overset{2}{f}_1(x_2)}{dx_2}\,x_1 + \overset{3}{\mathrm{F}}_2 + \overset{2}{f}_{22}(x_3)x_1 + \overset{4}{f}_{22}(x_3) + \\ & + \overset{2}{c}_{13}(x_1^2 + x_2) + (\overset{6}{c}_{31} + \overset{2}{c}_1)x_1 x_2 + (\overset{3}{c}_3 + \overset{1}{c}_{13})x_1 + (\overset{1}{c}_{21} + \overset{7}{c}_{21})/x_3 + c_{21}/x_3\,, \end{aligned} \tag{4.125b}$$

$$f_3 = \frac{\partial f_{13}(x_1,x_2)}{\partial x_2} + \overset{1}{f}_{13}(x_1) + \frac{d\,\overset{2}{f}_1(x_2)}{dx_2} + \overset{3}{f}_3(x_3) + \overset{2}{c}_{13}\,x_1 + (\overset{6}{c}_{31} + \overset{2}{c}_1)x_2 + \\ + (\overset{3}{c}_3 + \overset{1}{c}_{13}) + \overset{7}{c}_{31}/\,x_3 + c_{32}\,/\,x_3 + \overset{1}{c}_{31}\left(\frac{x_1^{\ 2}}{2} - x_2\right)/\,x_3. \tag{4.125c}$$

Ellenõrzés

(2.7)

$$\frac{\partial^2 f_{13}(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}x_3 + \frac{\partial^2 f_{13}(x_1,x_2)}{\partial x_2^{\ 2}}x_1 x_3 + \frac{d\,\overset{1}{f}_{13}(x_1)}{dx_1}x_3 + \frac{d^2\,\overset{2}{f}_1(x_2)}{dx_2^{\ 2}}x_1 x_3 + \overset{2}{c}_{13}\,x_3 + \\ + (\overset{6}{c}_{31} + \overset{2}{c}_1)x_1 x_3 - \frac{\partial^2 f_{13}(x_1,x_2)}{\partial x_2^{\ 2}}x_1 x_3 - \frac{d^2\,\overset{2}{f}_1(x_2)}{dx_2^{\ 2}}x_1 x_3 - (\overset{6}{c}_{31} + \overset{2}{c}_1)x_1 x_3 + \\ + \overset{1}{c}_{31}\,x_1 = \frac{\partial^2 f_{13}(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}x_3 + \frac{d\,\overset{1}{f}_{13}(x_1)}{dx_1}x_3 + \overset{2}{c}_{13}\,x_3 + \overset{1}{c}_{31}\,x_1. \tag{4.126}$$

Az egyenlet azonosan teljesül.

(2.8)

$$\frac{\partial f_{13}(x_1,x_2)}{\partial x_2} + \overset{1}{f}_{13}(x_1) + \frac{d\,\overset{2}{f}_1(x_2)}{dx_2} + \frac{dx_3\,\overset{3}{f}_3(x_3)}{dx_3} + \overset{2}{c}_{13}\,x_1 + (\overset{6}{c}_{31} + \overset{2}{c}_1)x_2 + \left(\overset{3}{c}_3 + \overset{1}{c}_{13}\right) = \\ = \frac{\partial f_{13}(x_1,x_2)}{\partial x_2} + \overset{1}{f}_{13}(x_1) + \frac{d\,\overset{2}{f}_1(x_2)}{dx_2} + \frac{dx_3\,\overset{3}{f}_3(x_3)}{dx_3} + \overset{2}{c}_{13}\,x_1 + \overset{2}{c}_1\,x_2 + \left(\overset{1}{c}_{13} + \overset{3}{c}_3\right). \tag{4.127}$$

Ez az egyenlet nem teljesül azonosan: a bal oldalon a $\overset{6}{c}_{31}\,x_2$ kifejezés marad. Formálisan a

$$\overset{6}{c}_{31}\,x_2 = 0 \tag{4.128}$$

egyenletként kell értelmezni. Megjegyezzük, hogy az f_1 függvényben bevezethetnénk a $\overset{2}{c}_1$ együttható helyett a $\overset{6}{c}_{31} + \overset{2}{c}_1$-t, ekkor a (127) egyenlet teljesülne, továbbá a (126)-ban f_1 nem szerepel, a (129)-ben viszont a f_1 x_1 szerinti deriváltja szerepel, tehát a $\overset{6}{c}_{31}\,x_2^{\ 2}/2$ tag ezen egyenletekben nem játszik szerepet. Ekkor a $\overset{6}{c}_{31} + \overset{2}{c}_1$ együtthatót össze lehet vonni, célszerûen $\overset{2}{c}_1$-vé. A (128) figyelembe vételével a (127) egyenlet azonosan teljesül.

$$\frac{\partial f_{13}(x_1,x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{13}(x_1,x_2)}{\partial x_2}x_1 + \overset{1}{f}_{13}(x_1)x_1 + \frac{d\,\overset{1}{f}_{13}(x_1)}{dx_1}x_2 + \frac{dx_3\,\overset{2}{f}_{22}(x_3)}{dx_3}x_1 +$$

(2.9) $$\begin{aligned}&+\frac{d\ \overset{1}{f}_1(x_1)}{dx_1}+\frac{d\ \overset{2}{f}_1(x_2)}{dx_2}x_1+\frac{dx_3\ \overset{4}{f}_{22}(x_3)}{dx_3}+\overset{2}{c}_{13}(x_1^{\ 2}+x_2)+\\&+(\overset{6}{c}_{31}+\overset{2}{c}_1)x_1x_2+(\overset{3}{c}_3+\overset{1}{c}_{13})x_1-\frac{\partial f_{13}(x_1,x_2)}{\partial x_2}x_1-\overset{1}{f}_{13}(x_1)x_1-\frac{d\ \overset{2}{f}_1(x_2)}{dx_2}x_1-\\&-\frac{dx_3\ \overset{3}{f}_3(x_3)}{dx_3}x_1-\overset{2}{c}_{13}\,x_1^{\ 2}-(\overset{6}{c}_{31}+\overset{2}{c}_1)x_1x_2-(\overset{3}{c}_3+\overset{1}{c}_{13})x_1=\\&=\frac{dx_3\ \overset{2}{f}_{22}(x_3)}{dx_3}x_1+\frac{\partial f_{13}(x_1,x_2)}{\partial x_1}+\frac{d\ \overset{1}{f}_{13}(x_1)}{dx_1}x_2+\\&+\frac{d\ \overset{1}{f}_1(x_1)}{dx_1}-\frac{dx_3\ \overset{3}{f}_3(x_3)}{dx_3}x_1+\frac{dx_3\ \overset{4}{f}_{22}(x_3)}{dx_3}+\overset{2}{c}_{13}\,x_2.\end{aligned}\tag{4.129}$$

Ez az egyenlet szintén azonosan teljesül.

Megjegyzések

A továbbiakban a (128) egyenletet figyelembe vesszük.

Az $f_1=F_{11}(x_3)$, $f_2=\overset{7}{c}_{21}/\,x_3+c_{21}\,/\,x_3$ és az $f_3=\overset{7}{c}_{31}/\,x_3+c_{32}\,/\,x_3$ megegyezik a (2.13) alatti felírt integrálási szabad függvénnyel.

A továbbiakban az, általánosság megsértése nélkül, a $\overset{7}{c}_{21}$-t és a $\overset{7}{c}_{31}$-t nullának választjuk.

4.4. Kétargumentumú függvényekbõl álló egyedi megoldás figyelembe véve, hogy az f_2 és az f_3 x_3-mal van szorozva

Ebben az esetben a (2.7-9) parciális differenciálegyenlet-rendszer általános megoldását az alábbi alakban keressük

$$f_1=f_{11}(x_2,x_3)+f_{12}(x_3,x_1)+f_{13}(x_1,x_2)\,,\tag{4.130a}$$

$$f_2=\hat{f}_{21}(x_2,x_3)/\,x_3+\hat{f}_{22}(x_3,x_1)/\,x_3+\hat{f}_{23}(x_1,x_2)/\,x_3\,,\tag{4.130b}$$

$$f_3=\hat{f}_{31}(x_2,x_3)/\,x_3+\hat{f}_{32}(x_3,x_1)/\,x_3+\hat{f}_{33}(x_1,x_2)/\,x_3\,.\tag{4.130c}$$

Elsõnek a (2.8) egyenletbe helyettesítünk be.

$$\frac{\partial\hat{f}_{31}(x_2,x_3)}{\partial x_3}+\frac{\partial\hat{f}_{32}(x_3,x_1)}{\partial x_3}=\frac{\partial f_{11}(x_2,x_3)}{\partial x_2}+\frac{\partial f_{13}(x_1,x_2)}{\partial x_2}.\tag{4.131}$$

Az argumentumok szétválasztásával az alábbi egyenleteket nyerjük.

(x_2,x_3) $$\frac{\partial \hat{f}_{31}(x_2,x_3)}{\partial x_3} = \frac{\partial f_{11}(x_2,x_3)}{\partial x_2}, \qquad (4.132)$$

(x_1,x_2) $$\frac{\partial f_{13}(x_1,x_2)}{\partial x_2} = 0, \qquad (4.133)$$

(x_1,x_3) $$\frac{\partial \hat{f}_{32}(x_3,x_1)}{\partial x_3} = 0. \qquad (4.134)$$

Az utolsó kettõt integrálva

$$f_{13}(x_1,x_2) = F_{13}(x_1), \qquad (4.135)$$

$$\hat{f}_{32}(x_3,x_1) = \hat{F}_{32}(x_1). \qquad (4.136)$$

Ezek figyelembe vételével

$$f_1 = f_{11}(x_2,x_3) + f_{12}(x_3,x_1) + F_{13}(x_1), \qquad (4.137a)$$

$$f_3 = \hat{f}_{31}(x_2,x_3)/x_3 + \hat{F}_{32}(x_1)/x_3 + \hat{f}_{33}(x_1,x_2)/x_3. \qquad (4.137c)$$

A (131) egyenletnek a kétargumentumú függvényeken kívül lehetnek egyargumentumú megoldásai is. Ezek az alábbi szerkezetûek lehetnek.

A (131) egyenletben szereplõ függvények csak az egy x_1 argumentumtól függenek. Ennek feltétele, hogy az

$$f_{13}(x_1,x_2) = \overset{1}{f}_{13}(x_1)x_2, \qquad (4.138a)$$

$$\hat{f}_{32}(x_3,x_1) = \overset{1}{\hat{f}}_{32}(x_1)x_3 \qquad (4.138b)$$

választással éljünk, illetve két további függvény legyen zérussal egyenlõ, ekkor fennáll az alábbi összefüggés:

$$\overset{1}{\hat{f}}_{32}(x_1) = \overset{1}{f}_{13}(x_1). \qquad (4.139)$$

A (131) egyenletben szereplõ függvények csak az egy x_2 argumentumtól függenek. Ennek feltétele, hogy az

$$\hat{f}_{31}(x_2,x_3) = \overset{2}{\hat{f}}_{31}(x_2)x_3, \qquad (4.140a)$$

$$f_{11}(x_2,x_3) = \overset{2}{f}_{11}(x_2), \qquad (4.140b)$$

$$f_{13}(x_1,x_2) = \overset{2}{f}_{13}(x_2) \qquad (4.140c)$$

választással éljünk, valamint a további egy függvény legyen zérussal egyenlõ, ekkor fennáll az alábbi összefüggés.

$$\overset{2}{\hat{f}}_{31}(x_2) = \frac{d\,\overset{2}{f}_{11}(x_2)}{dx_2} + \frac{d\,\overset{2}{f}_{13}(x_2)}{dx_2} = \frac{d\,\overset{2}{f}_{1}(x_2)}{dx_2}\,, \tag{4.141}$$

ahol, az általánosság megsértése nélkül, bevezettük az $\overset{2}{f}_{1}(x_2)$ függvényt.

A (131) egyenletben szereplõ függvények csak az egy x_3 argumentumtól függenek. Ennek feltétele, hogy az

$$\hat{f}_{31}(x_2, x_3) = \overset{3}{\hat{f}}_{31}(x_3)\,, \tag{4.142a}$$

$$\hat{f}_{32}(x_3, x_1) = \overset{3}{\hat{f}}_{32}(x_3)\,, \tag{4.142b}$$

$$f_{11}(x_2, x_3) = \overset{3}{f}_{11}(x_3)\,x_2 \tag{4.142c}$$

választással éljünk, illetve az egy további függvény legyen zérussal egyenlõ, ekkor fennáll az alábbi összefüggés.

$$\frac{d\,\overset{3}{\hat{f}}_{31}(x_3)}{dx_3} + \frac{d\,\overset{3}{\hat{f}}_{32}(x_3)}{dx_3} = \frac{d\,\overset{3}{\hat{f}}_{3}(x_3)}{dx_3} = \overset{3}{f}_{11}(x_3)\,, \tag{4.143}$$

ahol bevezettük az $\overset{3}{\hat{f}}_{3}(x_3)$ függvényt.

Az egyargumentumosra vezetõ egyedi megoldásokat is figyelembe véve felírjuk a (137), illetve (130b) alatti függvényeket.

$$f_1 = f_{11}(x_2, x_3) + f_{12}(x_3, x_1) + F_{13}(x_1) + \overset{1}{\hat{f}}_{32}(x_1)\,x_2 + \overset{2}{f}_{1}(x_2) + \frac{d\,\overset{3}{\hat{f}}_{3}(x_3)}{dx_3}\,x_2\,, \tag{4.144a}$$

$$f_2 = \hat{f}_{21}(x_2, x_3)/x_3 + \hat{f}_{22}(x_3, x_1)/x_3 + \hat{f}_{23}(x_1, x_2)/x_3\,, \tag{4.144b}$$

$$f_3 = \hat{f}_{31}(x_2, x_3)/x_3 + \hat{F}_{32}(x_1)/x_3 + \hat{f}_{33}(x_1, x_2)/x_3 + \overset{1}{\hat{f}}_{32}(x_1) + \frac{d\,\overset{2}{f}_{1}(x_2)}{dx_2} + \overset{3}{\hat{f}}_{3}(x_3)/x_3\,. \tag{4.144c}$$

Tekintsük a (2.7) egyenletet.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \hat{f}_{21}(x_2, x_3)}{\partial x_2} + \frac{\partial \hat{f}_{23}(x_1, x_2)}{\partial x_2} - \frac{\partial \hat{f}_{31}(x_2, x_3)}{\partial x_2}\,x_1 - \frac{\partial \hat{f}_{33}(x_1, x_2)}{\partial x_2}\,x_1 - \\ &- \frac{d^2\,\overset{2}{f}_{1}(x_2)}{dx_2^{\,2}}\,x_1 x_3 = \frac{d\hat{F}_{32}(x_1)}{dx_1} + \frac{\partial \hat{f}_{33}(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{d\,\overset{1}{\hat{f}}_{32}(x_1)}{dx_1}\,x_3. \end{aligned} \tag{4.145}$$

Ezt, az argumentumokat szétválasztva, az alábbi egyenletekre bonthatjuk.

$$(x_1,x_2,x_3) \qquad -\frac{\partial \hat{f}_{31}(x_2,x_3)}{\partial x_2}x_1 - \frac{d^2\,\overset{2}{f}_1(x_2)}{dx_2{}^2}x_1x_3 = 0\,, \tag{4.146}$$

$$(x_1,x_2) \qquad \frac{\partial \hat{f}_{23}(x_1,x_2)}{\partial x_2} - \frac{\partial \hat{f}_{33}(x_1,x_2)}{\partial x_2}x_1 = \frac{\partial \hat{f}_{33}(x_1,x_2)}{\partial x_1}\,, \tag{4.147}$$

$$(x_1,x_3) \qquad \frac{d\,\overset{1}{\hat{f}}_{32}(x_1)}{dx_1}x_3 = 0\,, \tag{4.148}$$

$$(x_2,x_3) \qquad \frac{\partial \hat{f}_{21}(x_2,x_3)}{\partial x_2} = 0\,, \tag{4.149}$$

$$(x_1) \qquad \frac{d\hat{F}_{32}(x_1)}{dx_1} = 0\,. \tag{4.150}$$

Feltéve, hogy

$$\tilde{\hat{f}}_{31}(x_2,x_3) = \overset{4}{\hat{f}}_{31}(x_2)x_3\,, \tag{4.151}$$

és egyszerûsítve x_3-mal, (146)-ból kapjuk

$$\frac{d\,\overset{4}{\hat{f}}_{31}(x_2)}{dx_2} = -\frac{d^2\,\overset{2}{f}_1(x_2)}{dx_2{}^2}\,. \tag{4.152}$$

Ezt integrálva

$$\overset{4}{\hat{f}}_{31}(x_2) = -\frac{d\,\overset{2}{f}_1(x_2)}{dx_2} + \overset{4}{\hat{c}}_{31}\,. \tag{4.153}$$

Azaz

$$\hat{f}_{31}(x_2,x_3) = \left(-\frac{d\,\overset{2}{f}_1(x_2)}{dx_2} + \overset{4}{\hat{c}}_{31}\right)x_3\,. \tag{4.154}$$

Ezzel a (132) egyenlet integrálhatóvá vált. (154) alapján látható, hogy az f_{11} függvény csak x_2-tõl függhet. Figyelembe véve a (140b) függvényt, lásd még a (141)-et is,

$$-\frac{d\,\overset{2}{f}_1(x_2)}{dx_2} + \overset{4}{\hat{c}}_{31} = \frac{d\,\overset{2}{f}_1(x_2)}{dx_2}\,, \tag{4.155}$$

ahonnét

$$\overset{2}{f}_1(x_2) = \frac{1}{2}\overset{4}{\hat{c}}_{31}\,x_2\,. \tag{4.156}$$

Tekintsük a (147) egyenletet! Ez megegyezik a (3.139) egyenlettel. Annak megoldását itt felhasználnók. Két megjegyzés kívánkozik ide. Az egyik, hogy az egyargumentumú megoldásai megjelenhetnek más származékegyenletben, ezért, azokat nem itt, hanem a késõbbiek során írjuk fel. A másik, hogy elvben a (146) egyenletbõl kerülhetnek a (147) egyenletbe csökkentett argumentumú megoldások, de mivel az elsõ egyenletben az argumentumok szerkezete (x_1,x_2), a (módosított) másodiké $x_1x_3(x_2)$, ezért ez az eset kizárt. Tehát a (147) egyenlet megoldása szorzatalakban megadható a (3.140b,c) alapján, és ezzel az egyenlettel a továbbiakban foglalkozni nem kell. Tehát

$$\hat{f}_{23}(x_1,x_2)=\left(\overset{51}{F}_1(x_1)x_1+\frac{d\overset{51}{F}_1(x_1)}{dx_1}\right)e^{x_2}+x_1e^{\frac{x_1^2}{2}}\left(\overset{51}{F}_1(x_1)+\frac{d\overset{51}{F}_1(x_1)}{dx_1}\right)+ \\ +\frac{d\overset{53}{F}_1(x_1)}{dx_1}x_2+\overset{54}{F}_2(x_2)x_1+\overset{0}{F}_1(x_1), \tag{4.157a}$$

$$\hat{f}_{33}(x_1,x_2)=\overset{51}{F}_1(x_1)e^{x_2}+e^{\frac{x_1^2}{2}}\frac{d\overset{52}{F}_2(x_2)}{dx_2}+\overset{53}{F}_1(x_1)+\overset{54}{F}_2(x_2)x_1+\overset{1}{C}_1\left(\frac{x_1^2}{2}-x_2\right)+\overset{1}{C}_2e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}+\overset{0}{C}. \tag{4.157b}$$

A továbbiakban a (148-150) egyenleteket integráljuk.

$$\overset{1}{\hat{f}}_{32}(x_1)=-\overset{1}{\hat{c}}_{32}, \tag{4.158}$$

$$\hat{f}_{21}(x_2,x_3)=\hat{F}_{21}(x_3), \tag{4.159}$$

$$\hat{F}_{32}(x_1)=\hat{c}_{32}. \tag{4.160}$$

Ezután tekintsük a csökkentett argumentumú megoldásokat. Megjegyezzük, hogy ˆ utal arra, hogy x_3-mal osztani kell.

$$\tilde{\hat{f}}_{21}(x_2,x_3)=\overset{5}{\hat{f}}_{21}(x_2)+\overset{6}{\hat{f}}_{21}(x_3)x_2, \tag{4.161}$$

$$\tilde{\hat{f}}_{23}(x_1,x_2)=\overset{2}{f}_{23}(x_2)+\overset{5}{\hat{f}}_{23}(x_2)x_1+\overset{6}{\hat{f}}_{23}(x_1)x_2, \tag{4.162}$$

$$\tilde{\hat{f}}_{31}(x_2,x_3)=\overset{5}{\hat{f}}_{31}(x_2)+\overset{6}{\hat{f}}_{31}(x_3)x_2, \tag{4.163}$$

$$\tilde{\hat{f}}_{33}(x_1,x_2)=\overset{2}{\hat{f}}_{33}(x_2)+\overset{6}{\hat{f}}_{33}(x_1)x_2+\overset{7}{\hat{f}}_{33}(x_2)/x_1, \tag{4.164a}$$

$$\overset{2}{\tilde{f}}_1(x_2)=\overset{2}{c}_1\frac{x_2^2}{2}, \tag{4.165}$$

$$\tilde{\hat{F}}_{32}(x_1)=\overset{2}{\hat{c}}_{32}x_1, \tag{4.166}$$

$$\tilde{\hat{f}}_{33}(x_1,x_2)=\overset{1}{\hat{f}}_{33}(x_1)+\overset{8}{\hat{f}}_{33}(x_2)x_1\,. \tag{4.164b}$$

Az $\overset{1}{\hat{f}}_{32}(x_1)$ függvényre ismételten (158), illetve (166) írható föl.

Mivel az $\hat{f}_{33}$ függvénynek két különbözõ differenciálkifejezése szerepel a (145) egyenletben, ezért két összefüggést kapunk, ezek a (164a) és a (164b). Ebben az esetben is a cél az argumentumok számának csökkentése, ezért csak azokat a függvényeket tartjuk meg a felbontásban, amelyek mindkét kifejezésben csökkentik az argumentumok számát. Végül figyelembe kell venni a (147) függvényegyenlet megoldásához felvett egyargumentumú függvényeket is. Továbbá, a szorzat alakú függvénnyel a (147) egyenletet megoldottuk, lásd a (157a,b)-t. Ezeket figyelembe véve a $\tilde{\hat{f}}_{33}$ függvényt az alábbi kifejezéssel adjuk meg.

$$\tilde{\hat{f}}_{33}(x_1,x_2)=\overset{1}{\hat{f}}_{33}(x_1)+\overset{2}{\hat{f}}_{33}(x_2)\,. \tag{4.167}$$

A (161) és (162) bontásban az elsõ két tag azonos, és mivel mindkettõ ugyanazon $\hat{f}_2$ függvényhez tartozik, ráadásul mindkettõ egybeesik a (147) függvényegyenlet megoldásához felvett egyargumentumú függvények egyikével. Ezeket figyelembe véve

$$\tilde{\hat{f}}_{21}(x_2,x_3)=\overset{6}{\hat{f}}_{21}(x_3)x_2\,, \tag{4.168}$$

$$\tilde{\hat{f}}_{23}(x_1,x_2)=\overset{1}{\hat{f}}_{23}(x_1)+\overset{2}{\hat{f}}_{23}(x_2)+\overset{5}{\hat{f}}_{23}(x_2)x_1+\overset{6}{\hat{f}}_{23}(x_1)x_2\,. \tag{4.169}$$

Végül tekintetbe kell venni, hogy a (2.8) egyenlet integrálásakor már bevezettünk néhány csökkentett argumentumú függvényt, lásd a (138), (140) és (142) összefüggéseket. Mivel a kétféleképpen bevezetett csökkentett argumentumú függvények nem azonosak, mindegyiket megtartjuk. Ugyanakkor az $F_{31}(x_1)/x_3$ megegyezik a $\overset{1}{\hat{f}}_{33}(x_1)/x_3$ függvénnyel, ezért az elõbbit figyelmen kívül hagyjuk. Megjegyezzük, hogy a felírás során az f_1 függvényben az x_2 együtthatója, illetve az f_3 függvényben a konstans tag együtthatója egyaránt $-\overset{1}{\hat{c}}_{32}+\overset{4}{\hat{c}}_{31}/2$, az utóbb bevezetett $\overset{4}{\hat{c}}_{31}$ tagot elhagyjuk. A továbbiakban áttérhetünk a (2.7) egyenlet (145) alatti alakjának a vizsgálatára.

Ehhez elõször felírjuk a (144) alatti függvények vizsgálandó alakjait. Ennek során a 5. megoldás szorzatalakú eredményét csak, mint $\overset{5}{F}_i$ -t (i = 2,3) jelöljük, illetve az 1. megoldást csak $\overset{1}{\mathrm{F}}_3$ alakban adjuk meg. Meg kell jegyezni azt is, hogy sem a (146), sem a (147) egyenletbe „származék”, azaz csökkentett argumentumú függvény nem kerülhet be. Ezt figyelembe véve a vizsgálandó függvényekbe a (147) megoldása már beírható, és már csak a (148-150) egyenletekkel foglalkozunk. Továbbá (149) egyenletbe sem kerülhetnek be csökkentett argumentumú megoldások, ezért ezt az egyenletet sem kell vizsgálni, megoldása azonnal felírható. Végül jelezzük, hogy (147) származék egyenlete $x_1 \cdot (x_2)$ alakú lesz. Tehát

$$f_1 = f_{12}(x_3,x_1) + F_{13}(x_1) + \overset{1}{\hat{f}}_{32}(x_1) + \overset{2}{f}_1(x_2) + \frac{d\,\overset{3}{\hat{f}}_3(x_3)}{dx_3}x_2 + \overset{2}{c}_1\frac{x_2^{\,2}}{2} - \overset{1}{\hat{c}}_{32}\,x_2\,, \tag{4.170a}$$

$$\begin{gathered} f_2 = \hat{F}_{21}(x_3)/x_3 + \hat{f}_{22}(x_3,x_1)/x_3 + \overset{6}{\hat{f}}_{21}(x_3)x_2/x_3 + \overset{1}{\hat{f}}_{23}(x_1)/x_3 + \overset{2}{\hat{f}}_{23}(x_2)/x_3 + \\ + \overset{5}{\hat{f}}_{23}(x_2)x_1/x_3 + \overset{6}{\hat{f}}_{23}(x_1)x_2/x_3 + \overset{5}{\mathrm{F}}_2 + \overset{0}{\mathrm{F}}_2\,, \end{gathered} \tag{4.170b}$$

$$\begin{gathered} f_3 = \hat{F}_{32}(x_1)/x_3 + \overset{2}{c}_1\,x_2 + \overset{2}{\hat{c}}_{32}\,x_1/x_3 - \overset{1}{\hat{c}}_{32} + \hat{c}_{32}/x_3 + \overset{3}{\hat{f}}_3(x_3)/x_3 + \overset{1}{\hat{f}}_{33}(x_1)/x_3 + \\ + \overset{2}{\hat{f}}_{33}(x_2)/x_3 + \overset{5}{\mathrm{F}}_3 + \overset{1}{\mathrm{F}}_3 + \overset{0}{\mathrm{F}}_3\,. \end{gathered} \tag{4.170c}$$

Ismételten felírjuk a (2.7) egyenletet, pontosabban már csak a (147,148,150)-nek megfelelõ tagjait, a teljes megoldások kifejezéseit – mivel azok kielégítik a (2.7) egyenletet – nem írjuk ki:

$$\begin{gathered} \overset{6}{\hat{f}}_{21}(x_3) + \frac{d\,\overset{2}{\hat{f}}_{23}(x_2)}{dx_2} + \frac{d\,\overset{5}{\hat{f}}_{23}(x_2)}{dx_2}x_1 + \overset{6}{\hat{f}}_{23}(x_1) - \overset{2}{c}_1\,x_1x_3 - \\ - \frac{d\,\overset{2}{\hat{f}}_{33}(x_2)}{dx_2}x_1 = \overset{2}{\hat{c}}_{32} + \frac{d\,\overset{1}{\hat{f}}_{33}(x_1)}{dx_1}. \end{gathered} \tag{4.171}$$

Ezt, az argumentumokat szétválasztva, az alábbi egyenletekre bonthatjuk.

$x_1 \cdot (x_2)$
$$\frac{d\,\overset{5}{\hat{f}}_{23}(x_2)}{dx_2}x_1 - \frac{d\,\overset{2}{\hat{f}}_{33}(x_2)}{dx_2}x_1 = 0\,, \tag{4.172}$$

(x_1,x_3)
$$-\overset{2}{c}_1\,x_1x_3 = 0\,, \tag{4.173}$$

(x_1)
$$\overset{6}{\hat{f}}_{23}(x_1) = \frac{d\,\overset{1}{\hat{f}}_{33}(x_1)}{dx_1}\,, \tag{4.174}$$

(x_2) $$\frac{d\,\overset{2}{\hat{f}}_{23}(x_2)}{dx_2} = 0\,, \tag{4.175}$$

(x_3) $$\overset{6}{\hat{f}}_{21}(x_3) = 0\,, \tag{4.176}$$

(c) $$\overset{2}{\hat{c}}_{32} = 0\,. \tag{4.177}$$

A (172) egyenlet alapján írható

$$\overset{5}{\hat{f}}_{23}(x_2) = \overset{2}{\hat{f}}_{33}(x_2) + \overset{5}{\hat{c}}_{23}\,. \tag{4.178}$$

A (173) egyenlet alapján kapjuk

$$\overset{2}{c}_1 = 0\,. \tag{4.179}$$

Továbbá (175) integrálható, az eredmény

$$\overset{2}{\hat{f}}_{23}(x_2) = \overset{2}{\hat{c}}_{23}\,. \tag{4.180}$$

Ezeket figyelembe véve a keresett (170) alatti függvények (most már figyelembe véve (158-160)-at):

$$f_1 = F_{13}(x_1) - \overset{1}{\hat{c}}_{32}\,x_2 + \frac{d\,\overset{3}{\hat{f}}_3(x_3)}{dx_3}x_2 + f_{12}(x_3,x_1)\,, \tag{4.181a}$$

$$\begin{aligned} f_2 &= \hat{F}_{21}(x_3)/x_3 + \overset{1}{\hat{f}}_{23}(x_1)/x_3 + \overset{2}{\hat{c}}_{23}/x_3 + \\ &+ \left(\overset{2}{\hat{f}}_{33}(x_2) + \overset{5}{\hat{c}}_{23}\right)x_1/x_3 + \frac{\partial\,\overset{1}{\hat{f}}_{33}(x_1)}{\partial x_1}x_2/x_3 + \hat{f}_{22}(x_3,x_1)/x_3 + \overset{5}{\mathrm{F}}_2 + \overset{0}{\mathrm{F}}_2\,, \end{aligned} \tag{4.181b}$$

$$f_3 = -\overset{1}{\hat{c}}_{32} + \hat{c}_{32}/x_3 + \overset{3}{\hat{f}}_3(x_3)/x_3 + \overset{1}{\hat{f}}_{33}(x_1)/x_3 + \overset{2}{\hat{f}}_{33}(x_2)/x_3 + \overset{5}{\mathrm{F}}_3 + \overset{1}{\mathrm{F}}_3 + \overset{0}{\mathrm{F}}_3\,. \tag{4.181c}$$

Megjegyzés.

A (2.7) egyenlet vizsgálata során figyelmet fordítottunk arra, hogy ha az argumentum szerkezete megváltozik, akkor a függvény más és más származtatott egyenletbe kerül(het). Ugyanakkor a (2.7) egyenlet esetén elõáll az a helyzet, hogy van olyan egyedi megoldás, amely során a származtatott függvények nem kerülnek át más „sorra". Lássuk.

Kiinduló összefüggésként a (145) egyenletet tekintjük. Tegyük fel, hogy $\hat{f}_{23}(x_1,x_3) = 0$. Ekkor

$$-\frac{\partial \hat{f}_{33}(x_1,x_2)}{\partial x_2}x_1=\frac{\partial \hat{f}_{33}(x_1,x_2)}{\partial x_1}. \tag{4.182}$$

Ez az egyenlet megegyezik a (3.4) egyenlettel, figyelembe véve, hogy $x_3 f_{33}(x_1,x_2)$ éppen $\hat{f}_{33}(x_1,x_2)$ -t adja.

A megoldást a (3.8) és (3.13) alapján írjuk fel.

$$\hat{f}_{33}(x_1,x_2)=\overset{1}{C}_{31}\left(\frac{x_1^{\,2}}{2}-x_2\right)+\overset{1}{C}_{32}\,e^{\left(\frac{x_1^{\,2}}{2}-x_2\right)}+\overset{0}{C}. \tag{4.183}$$

Mivel ez a megoldás már szerepel (181c)-ben, ezért ismételten figyelembe venni nem kell.

Most már rátérhetünk a (2.9) egyenlet vizsgálatára.

$$\frac{d\hat{F}_{21}(x_3)}{dx_3}+\frac{\partial \hat{f}_{22}(x_3,x_1)}{\partial x_3}+\overset{1}{\hat{c}}_{32}\,x_1-\frac{d\,\overset{3}{\hat{f}}_3(x_3)}{dx_3}x_1=\frac{dF_{13}(x_1)}{dx_1}+\frac{\partial f_{12}(x_3,x_1)}{\partial x_1}. \tag{4.184}$$

A (184) egyenletbõl az argumentumok szétválasztásával a következõ feltételek adódnak.

(x_1,x_3)
$$\frac{\partial \hat{f}_{22}(x_3,x_1)}{\partial x_3}-\frac{d\,\overset{3}{\hat{f}}_3(x_3)}{dx_3}x_1=\frac{\partial f_{12}(x_3,x_1)}{\partial x_1}, \tag{4.185}$$

(x_1)
$$\overset{1}{\hat{c}}_{32}\,x_1=\frac{\partial F_{13}(x_1)}{\partial x_1}, \tag{4.186}$$

(x_3)
$$\frac{d\hat{F}_{21}(x_3)}{dx_3}. \tag{4.187}$$

Elsõnek a (185) egyenletet vizsgáljuk. Az látnivaló, hogy az $\overset{3}{\hat{f}}_3(x_3)$ tag az egyenletbõl „kiküszöbölhetõ", amennyiben feltételezzük, hogy

$$\hat{f}_{22}(x_3,x_1)=\overset{5}{\hat{f}}_{22}(x_3)x_1, \tag{4.188a}$$

$$f_{12}(x_3,x_1)=\overset{5}{f}_{12}(x_3)\frac{x_1^{\,2}}{2}. \tag{4.188b}$$

Ekkor a következõ egyenletet kapjuk.

$$\frac{d\,\overset{5}{\hat{f}}_{22}(x_3)}{dx_3}x_1-\frac{d\,\overset{3}{\hat{f}}_3(x_3)}{dx_3}x_1=\overset{5}{f}_{12}(x_3)x_1, \tag{4.189}$$

ahonnét

$$\overset{5}{f}_{12}(x_3) = \frac{d\,\overset{5}{\hat{f}}_{22}(x_3)}{dx_3} - \frac{d\,\overset{3}{\hat{f}}_{3}(x_3)}{dx_3}. \tag{4.190}$$

A (188), (190) megoldást mintegy leválasztottuk a (185) egyenletrõl, annak „maradéka”, azaz a

$$\frac{\partial \hat{f}_{22}(x_3,x_1)}{\partial x_3} = \frac{\partial f_{12}(x_3,x_1)}{\partial x_1} \tag{4.191}$$

egyenlet, fenn kell, hogy álljon.

Ez az egyenlet megegyezik a (3.34c) egyenlettel, azzal az eltéréssel, hogy

$$x_3 f_2(x_1,x_3) = \hat{f}_{22}(x_3,x_1). \tag{4.192}$$

Az eltérés az egyargumentumú (összeg alakban keresett) függvényekre jelentõs különbséget eredményez (x_3 szerint deriválunk), ezért, azokat nem lehet átvenni, a kétargumentumú (szorzat alakban keresett) függvények esetében a megoldás átvehetõ, lásd a (3.43a,b) összefüggéseket.

Tekintsük elõször a megoldást összegalakban!

$$\hat{f}_{22}(x_3,x_1) = \overset{1}{\hat{f}}_{22}(x_3) + \overset{2}{\hat{f}}_{22}(x_1), \tag{4.193a}$$

$$f_{12}(x_3,x_1) = \overset{1}{f}_{12}(x_3) + \overset{2}{f}_{12}(x_1). \tag{4.193b}$$

A megoldandó egyenlet

$$\frac{d\,\overset{1}{\hat{f}}_{22}(x_3)}{dx_3} = \frac{d\,\overset{2}{f}_{12}(x_1)}{dx_1}, \tag{4.194}$$

ahonnét

$$\overset{1}{\hat{f}}_{22}(x_3) = \overset{2}{c}_2\, x_3, \tag{4.195a}$$

$$\overset{2}{f}_{12}(x_1) = \overset{2}{c}_2\, x_1. \tag{4.195b}$$

Tekintsük ezután a szorzat alakban keresett megoldást (3.43a,b), pontosabban a (3.45a,b) alapján.

$$f_{12}(x_3,x_1) = \overset{3}{F}_1(x_1)\frac{d\,\overset{3}{F}_3(x_3)}{dx_3}, \tag{4.196a}$$

$$\hat f_{22}(x_3,x_1) = \frac{d\,\overset{3}{F}_1(x_1)}{dx_1}\overset{3}{F}_3(x_3)/x_3\,, \tag{4.196b}$$

A továbbiakban erre megoldásra, mint a harmadikra hivatkozunk, a x_3-ben lévõ eltérés miatt a megoldást *-gal különböztetjük meg a 3-diktól: $\overset{3*}{\mathrm{F}}$

Összefoglalva:

$$f_{12}(x_3,x_1) = \overset{1}{f}_{12}(x_3) + \overset{2}{c}_2\, x_1 + \overset{3*}{\mathrm{F}}_1\,, \tag{4.197a}$$

$$\hat f_{22}(x_3,x_1) = \overset{2}{c}_2\, x_3 + \overset{2}{\hat f}_{22}(x_1) + \overset{3*}{\mathrm{F}}_2\,. \tag{4.197b}$$

Ezután integráljuk a (186-187) egyenleteket (az elsõben a konstanst elhagyjuk).

(x_1) $$F_{13}(x_1) = \overset{1}{\hat c}_{32}\frac{x_1^{\,2}}{2}\,, \tag{4.198}$$

(x_3) $$\hat F_{21}(x_3) = \hat c_{21}\,. \tag{4.199}$$

Ezután felírható a három f_i függvény, figyelembe véve (182)-at, (188)-at, (190)-et, (196)-ot és (197-98)-at.

$$f_1 = \overset{1}{\hat c}_{32}\left(\frac{x_1^{\,2}}{2} - x_2\right) + \frac{d\,\overset{3}{\hat{\hat f}}_3(x_3)}{dx_3}x_2 + \left(\frac{d\,\overset{5}{\hat f}_{22}(x_3)}{dx_3} - \frac{d\,\overset{3}{\hat{\hat f}}_3(x_3)}{dx_3}\right)\frac{x_1^{\,2}}{2} + \overset{1}{f}_{12}(x_3) + \overset{2}{c}_2\, x_1 + \overset{3*}{\mathrm{F}}_1, \tag{4.200a}$$

$$\begin{aligned} f_2 = {} & \hat c_{21}/x_3 + \overset{1}{\hat{\hat f}}_{23}(x_1)/x_3 + \overset{2}{\hat c}_{23}/x_3 + \left(\overset{2}{\hat f}_{33}(x_2) + \overset{5}{\hat c}_{23}\right)x_1/x_3 + \\ & + \frac{d\,\overset{1}{\hat f}_{33}(x_1)}{dx_1}x_2/x_3 + \overset{2}{c}_2\, x_3/x_3 + \overset{2}{\hat f}_{22}(x_1)/x_3 + \overset{5}{\hat f}_{22}(x_3)x_1/x_3 + \overset{5}{\mathrm{F}}_2 + \overset{3*}{\mathrm{F}}_2 + \overset{0}{\mathrm{F}}_2, \end{aligned} \tag{4.200b}$$

$$f_3 = -\overset{1}{\hat c}_{32} + \hat c_{32}/x_3 + \overset{3}{\hat{\hat f}}_3(x_3)/x_3 + \overset{1}{\hat f}_{33}(x_1)/x_3 + \overset{2}{\hat f}_{33}(x_2)/x_3 + \overset{5}{\mathrm{F}}_3 + \overset{3*}{\mathrm{F}}_3 + \overset{1}{\mathrm{F}}_3 + \overset{0}{\mathrm{F}}_3\,. \tag{4.200c}$$

Ellenõrzés

Az ellenõrzés során a már megtalált megoldások függvényeit nem írjuk ki.

(2.7) $$\frac{d\,\overset{2}{\hat f}_{33}(x_2)}{dx_2}x_1 + \frac{d\,\overset{1}{\hat f}_{33}(x_1)}{dx_1} - \frac{d\,\overset{2}{\hat f}_{33}(x_2)}{dx_2}x_1 = \frac{d\,\overset{1}{\hat f}_{33}(x_1)}{dx_1}\,. \tag{4.201}$$

Azonosan teljesül.

(2.8) $$-\overset{1}{\hat{c}}_{32}+\frac{d\,\overset{3}{\hat{f}}_3(x_3)}{dx_3}=-\overset{1}{\hat{c}}_{32}+\frac{d\,\overset{3}{\hat{f}}_3(x_3)}{dx_3}. \qquad (4.202)$$

Ez is azonosan teljesül.

(2.9) $$\overset{2}{c}_2+\frac{d\,\overset{5}{\hat{f}}_{22}(x_3)}{dx_3}x_1+x_1\overset{1}{\hat{c}}_{32}-x_1\frac{d\,\overset{3}{\hat{f}}_3(x_3)}{dx_3}=\overset{1}{\hat{c}}_{32}\,x_1+\overset{2}{c}_2+\left(\frac{d\,\overset{5}{\hat{f}}_{22}(x_3)}{dx_3}-\frac{d\,\overset{3}{\hat{f}}_3(x_3)}{dx_3}\right)x_1. \qquad (4.203)$$

Ez szintén azonosan teljesül.

Megjegyzések

Az $f_1 = f_{12}(x_3)$, $f_2 = \overset{1}{\hat{f}}_{23}(x_1)/x_3 + \overset{2}{\hat{f}}_{22}(x_1)/x_3 = \hat{f}_2(x_1)/x_3$ és $f_3 = \hat{c}_{32}/x_3$ megegyezik a (2.13) alatti integrálási szabad függvényekkel.

4.5. A nyert megoldások összefoglalása és vizsgálata

Jelen pontban összefoglaljuk a nyert megoldásokat. Elkülönítjük az egyes független megoldásokat. Alkalmazzuk az elõzõ fejezetben bevezetett jelöléseket. A képletekben a $\varnothing_i$ (i = 1,2,3) jel utal arra, hogy az adott független megoldásban az egyik, vagy másik f_i függvény „nem vesz részt”. Végül megvizsgáljuk a megoldások szerkezetét.

4.5.1. Egyargumentumú függvények

$$f_1 = \overset{40}{F}_1(x_1)+c_{11}x_1 \quad +c_{12}x_2 \quad +[\overset{0}{F}_3(x_3)+c_1] \qquad (4.19a)$$

$$f_2 = \frac{\partial \overset{40}{F}_1}{\partial x_1}+c_{11} \quad +c_{12}x_1 \quad +[c_{23}/x_3] \qquad (4.19b)$$

$$f_3 = \varnothing_1 \quad c_{12} \quad +[c_{33}/x_3] \qquad (4.19c)$$

A megoldástípus két független megoldásra különíthetõ el.

Az elsõ megoldás tartalmazza „40” részmegoldást. Nyertünk ennek egy partikuláris megoldását is, amikor $\overset{40}{F}_1(x_1)=c_{11}x_1$. A további vizsgálatok során a partikuláris megoldástól eltekintünk. Ebben a megoldásban f_3 zérus.

A második független megoldás egy partikuláris megoldás. Mindhárom f_i függvény zérustól különbözõ.

Az f_1 függvény szabad integrálási függvényben c_1 egy partikuláris függvény.

Az f_2 függvény szabad integrálási függvénye csak egy c_{23}/x_3 partikuláris függvényt tartalmaz.

4.5.2. Egyargumentumú függvények figyelembe véve az x_3 szorzót

$f_1 =$	$-\hat{c}_{33}\left(\frac{x_1^2}{2}-x_2\right)$	$+\hat{c}_{23}x_1$	$\varnothing_3$	$\varnothing_4$	$+[\overset{0}{F}_{13}(x_3)+c_1]$	(4.43a)
$f_2 =$	$\varnothing_1$	$\hat{c}_{23}$	$\hat{c}_{31}x_2/x_3$	$\varnothing_4$	$+[(\overset{0}{F}_1(x_1)+\hat{c}_2)/x_3]$	(4.43b)
$f_3 =$	$\hat{c}_{33}$	$\varnothing_2$	$+\hat{c}_{31}x_1/x_3$	$+\overset{1}{C}_1\left(\frac{x_1^2}{2}-x_2\right)/x_3$	$+[\overset{0}{C}/x_3]$	(4.43c)

A megoldás négy független partikuláris megoldásra különíthetõ el.

Nincs olyan megoldás, amely tartalmazna egy szabadon választható függvényt.

Az elsõ megoldásban f_2 zérus.

A második megoldásban f_3 zérus. Ez a megoldás az „40" megoldás partikuláris esete $\overset{40}{F}_1(x_1)=\hat{c}_{23}x_1$ választással.

A harmadik megoldásban f_1 zérus, a megoldás partikuláris.

A negyedik megoldásban 1. megoldás polinomiális része szerepel.

Végül a 0. megoldás is szerepel, ezen belül az f_1 és f_2 az általánosokon kívül egy-egy partikuláris függvény is elõállt.

4.5.3. Kétargumentumú függvények

Elõször még a korábbi jelöléseket megtartva csoportosítjuk a megoldást.

$$
\begin{aligned}
f_1 = {} & \overset{3}{F}_1(x_1)\frac{dx_3\,\overset{3}{F}_3(x_3)}{dx_3}+\frac{x_1^2}{2}\frac{dx_3\,\overset{2}{f}_{22}(x_3)}{dx_3}+x_1\frac{dx_3\,\overset{4}{f}_{22}(x_3)}{dx_3}+\\
& +\overset{2}{c}_1\frac{x_2^2}{2}+f_{13}(x_1,x_2)+\overset{1}{f}_{13}(x_1)x_2+\overset{1}{f}_1(x_1)+\overset{2}{f}_1(x_2)-\\
& -\frac{dx_3\,\overset{3}{f}_3(x_3)}{dx_3}\left(\frac{x_1^2}{2}-x_2\right)+\overset{2}{c}_{13}x_1x_2+c_{13}x_2+[\overset{0}{F}_3(x_3)],
\end{aligned}
\tag{4.125a}
$$

$$
\begin{aligned}
f_2 = {} & \frac{d\,\overset{3}{F}_1(x_1)}{dx_1}\overset{3}{F}_3(x_3)+\overset{2}{f}_{22}(x_3)x_1+\overset{4}{f}_{22}(x_3)+\frac{\partial f_{13}(x_1,x_2)}{\partial x_1}+\frac{\partial f_{13}(x_1,x_2)}{\partial x_2}x_1+\\
& +\frac{d\,\overset{2}{f}_1(x_2)}{dx_2}x_1+\overset{1}{f}_{13}(x_1)x_1+\frac{d\,\overset{1}{f}_1(x_1)}{dx_1}+\frac{d\,\overset{1}{f}_{13}(x_1)}{dx_1}x_2+\\
& +\overset{2}{c}_{13}(x_1^2+x_2)+\overset{6}{c}_{31}x_1x_2+c_{13}x_1+\overset{7}{c}_{21}/x_3+c_{21}/x_3+[\overset{0}{F}_1(x_1)/x_3],
\end{aligned}
\tag{4.125b}
$$

$$
f_3=\frac{\partial f_{13}(x_1,x_2)}{\partial x_2}+\overset{1}{f}_{13}(x_1)+\frac{d\,\overset{2}{f}_1(x_2)}{dx_2}-\overset{3}{f}_3(x_3)+
$$

$$+\overset{2}{c}_{13}\,x_1+\overset{6}{c}_{31}\,x_2+c_{13}+\overset{1}{c}_{31}\left(\frac{x_1^{\ 2}}{2}-x_2\right)/\,x_3+[c_{32}\,/\,x_3]\,. \qquad (4.125c)$$

Négy megoldás-típust különíthetjük el. Ahhoz, hogy ezt belássuk a következõket kell figyelembe venni.

Elõször, hogy a

$$\overset{3}{F}_1(x_1)\frac{dx_3\,\overset{3}{F}_3(x_3)}{dx_3}+\frac{x_1^{\ 2}}{2}\frac{dx_3\,\overset{2}{f}_{22}(x_3)}{dx_3}+x_1\frac{dx_3\,\overset{4}{f}_{22}(x_3)}{dx_3} \qquad (4.204)$$

kifejezésben $x_1^2/2$ és x_1 partikuláris esetei a $\overset{3}{F}_1(x_1)$ függvénynek. Tehát a második és harmadik tag figyelmen kívül hagyható, mint partikuláris eset, a $\overset{n}{f}_{22}$ függvények felsõ indexe irreleváns. Továbbá vegyük észre, hogy az $\overset{1}{f}_1(x_1)$ függvény megegyezik az egyargumentumosnál megtalált $f_{11}(x_1)$ függvénnyel, azaz a „40” részleges megoldással, ez pedig ugyanebbe a megoldásba tartozik $\overset{3}{F}_3(x_3)=\overset{n}{f}_{22}(x_3)=1$ választással.

Másodszorra az alábbi „leszármazási” táblát kell figyelembe venni. Megjegyezzük, hogy az együtthatókat nem tüntettük fel.

$$\begin{array}{ccc} & f_{13}(x_1,x_2) & \\ \overset{1}{f}_{13}(x_1)x_2 & & \overset{2}{f}_1(x_2) \\ x_1x_2 & & x_2^{\ 2}/2 \\ & x_2 & \end{array} \qquad (4.205)$$

Harmadiknak már csak megállapítjuk, hogy van egy, az $\overset{3}{f}_3(x_3)$ függvényen alapuló megoldás; ennek a 7. sorszámot adjuk. Végül jelezzük, hogy ismételten elõállítottuk a csak az $\overset{11}{\mathrm{F}}$ függvényt tartalmazó megoldást.

A fentiek során alkalmaztuk a következõ jelölést $\overset{4}{F}_{12}=f_{13}(x_1,x_2)$.

A fentieket figyelembe véve a (125) a legáltalánosabb alakban így írható fel.

$$f_1=\quad \overset{3}{F}_1\,\partial_3(x_3\,\overset{3}{F}_3) \qquad +\overset{4}{F}_{12} \qquad -\left(\frac{x_1^{\ 2}}{2}-x_2\right)\partial_3(x_3\,\overset{7}{F}_3) \qquad \varnothing_1 \qquad +[\overset{0}{F}_3] \qquad (4.206a)$$

$$f_2=\quad \partial_1(\overset{3}{F}_1)\,\overset{3}{F}_3 \qquad +\partial_1\,\overset{4}{F}_{12}+x_1\partial_2\,\overset{4}{F}_{12} \qquad \varnothing_7 \qquad \varnothing_1 \qquad +[\overset{0}{F}_1/\,x_3] \qquad (4.206b)$$

$$f_3 = \quad \varnothing_3 \quad \partial_2 \overset{4}{F}_{12} \quad + \overset{7}{F}_3 \quad + \overset{1}{C}_1\left(\frac{x_1^2}{2} - x_2\right)/x_3 \quad + [\overset{0}{C}/x_3] \quad (4.206c)$$

A négy megoldás közül négy tartalmaz szabad függvényt; amelyekbõl egy kettõt. A legnagyobb „szabadsági fokkal” a kétargumentumos $\overset{4}{F}_{12}(x_1, x_2)$ függvény rendelkezik. A másik két esetben egy függvény a három f_i-bõl zérus, a (2.7-9) közül csak egy-egy egyenletben szerepelnek.

Rá kell mutatni arra, hogy a „40” részmegoldás a most megtalált $\overset{4}{F}_{12}(x_1, x_2)$ függvénynyel jellemzett megoldásnak (is) a partikuláris esete a $\overset{4}{F}_{12}(x_1, x_2) = \overset{40}{F}_1(x_1)$. választással.

Megjegyezzük, hogy az egyargumentumú megoldásban a c_{12} együtthatós megoldás az $\overset{4}{F}_{12}(x_1, x_2) = c_{12}x_2$ esetre megy vissza, továbbá, hogy az egyargumentumú függvények figyelembe véve az x_3 szorzót megoldásban a $\hat{c}_{33}$ tényezõhöz kapcsolódó megoldás az itt megadott $\overset{7}{F}_3(x_3)$ függvény partikuláris esete.

4.5.4. Kétargumentumú függvények figyelembe véve az x_3 szorzót

Átcsoportosítjuk a megoldásokat az elõzõ pontban kialakított rendszer szerint.

$$f_1 = \overset{3*}{F}_1(x_1)\frac{d\,\overset{3*}{F}_3(x_3)}{dx_3} + \frac{x_1^2}{2}\frac{d\,\overset{5}{\hat{f}}_{22}(x_3)}{dx_3} + \overset{2}{c}_2\,x_1 - \left(\frac{d\,\overset{3}{\hat{f}}_3(x_3)}{dx_3} - \overset{1}{\hat{c}}_{32}\right)\left(\frac{x_1^2}{2} - x_2\right) + [\,\overset{1}{f}_{12}(x_3)], \quad (4.200a)$$

$$f_2 = \frac{\partial\,\overset{3*}{F}_1(x_1)}{\partial x_1}\overset{3*}{F}_3(x_3)/x_3 + x_1\,\overset{5}{\hat{f}}_{22}(x_3)/x_3 + \overset{2}{c}_2 + \left(\overset{51}{F}_1(x_1)x_1 + \frac{d\,\overset{51}{F}_1(x_1)}{dx_1}\right)e^{x_2}/x_3 +$$

$$+ x_1 e^{\frac{x_1^2}{2}}\left(\overset{52}{F}_2(x_2) + \frac{d\,\overset{52}{F}_2(x_2)}{dx_2}\right)/x_3 + \frac{d\,\overset{53}{F}_1(x_1)}{dx_1}x_2/x_3 + \overset{54}{F}_2(x_2)x_1/x_3 + \quad (4.200b)$$

$$+\frac{d\,\overset{1}{\hat{f}}_{33}(x_1)}{dx_1}x_2/x_3 + (\overset{2}{\hat{f}}_{33}(x_2) + \overset{5}{\hat{c}}_{23})x_1/x_3 + [(\overset{2}{\hat{f}}_{22}(x_1) + \overset{1}{\hat{f}}_{23}(x_1))/x_3 + (\hat{c}_{21} + \overset{2}{\hat{c}}_{23})/x_3]$$

$$f_3 = (\overset{3}{\hat{f}}_3(x_3)/x_3 - \overset{1}{\hat{c}}_{32}) + \overset{51}{F}_1(x_1)e^{x_2}/x_3 + e^{\frac{x_1^2}{2}}\frac{d\,\overset{52}{F}_1(x_2)}{dx_2}/x_3 +$$

$$+\overset{53}{F}_1(x_1)/x_3 + \overset{54}{F}_2(x_2)/x_3 + \overset{1}{\hat{f}}_{33}(x_1)/x_3 + \overset{2}{\hat{f}}_{33}(x_2)/x_3 + \quad . \quad (4.200c)$$

$$+\overset{1}{\hat{c}}_{33}\left(\frac{x_1^2}{2} - x_2\right)/x_3 + \overset{2}{\hat{c}}_{33}\,e^{\frac{x_1^2}{2} - x_2}/x_3 + [\hat{c}_{32}/x_3].$$

Az f_1- és f_2-ben a 3. megoldása *-gal jelölt esete mellett megjelent annak egy partikuláris megoldása is, ahol $\overset{3*}{F}_1(x_1) = \frac{x_1^{\,2}}{2}$. Ezen kívül megjelent a 7. megoldás egy változata, ahol $\overset{7*}{F}_3(x_3) = \overset{7}{F}_3(x_3)/x_3$, valamint ennek egy partikuláris esete. Végül látható az integrálási szabad függvény is.

Az f_2-ben és az f_3-ben a részletesen kiírtuk az 5. megoldás mind a négy esetét. Mindkettõben látható az integrálási szabad függvény is, néhány partikuláris változattal.

Az f_3-ben megjelent a 1. elsõ megoldás mindkét esete.

A fentiek alapján a (200) függvényeket az alábbi egyszerûsített táblázatba foglalhatjuk össze. Itt kihasználtuk, hogy a már megismert megoldásokat egy-egy betûvel jelölhetjük. A függvénykapcsolatokat csak az új megoldás esetén adtuk meg. Egy partikuláris megoldás található a táblázatban, az 5. oszlopban. Ez a „40” partikuláris esete.

$$f_1 = \quad \varnothing_1 \qquad \overset{3*}{F}_1 \qquad \varnothing_3 \qquad -(\partial_3 \overset{7}{F}_3 - \overset{1}{\hat{c}}_{32})\left(\frac{x_1^{\,2}}{2} - x_2\right) \quad + \overset{2}{c}_2\, x_1 \qquad \overset{0}{F}_1 \tag{4.207a}$$

$$f_2 = \quad \varnothing_1 \qquad + \overset{3*}{F}_2 \qquad + \overset{51}{F}_2 + \overset{52}{F}_2 + \overset{53}{F}_2 + \overset{54}{F}_2 \qquad \varnothing_4 \qquad + \overset{2}{c}_2 \qquad \overset{0}{F}_2 \tag{4.207b}$$

$$f_3 = \quad \overset{11}{F}_3 + \overset{12}{F}_3 \qquad \varnothing_2 \qquad + \overset{51}{F}_3 + \overset{52}{F}_3 + \overset{53}{F}_3 + \overset{54}{F}_3 \qquad \overset{7}{F}_3 / x_3 - \overset{1}{\hat{c}}_{32} \qquad \varnothing_5 \qquad \overset{0}{F}_2 \tag{4.207c}$$

4.5.5. Összegzés

Az egyváltozós egyedi megoldások (függetlenül az x_3-mal való szorzástól) a gyakorlatban érdektelen, mert általánosabb megoldásokat kaptunk a kétváltozós egyedi megoldások esetén.

A kétváltozós egyedi megoldások esetén megkaptuk a korábban elõállított 0. megoldást, az 1. megoldás mindkét részét, valamint a 3. megoldást, továbbá a 4. megoldást. Ezen kívül kaptunk egy új megoldást: a 7-et, amely kétváltozós. Továbbá, figyelembe véve, hogy f_2 és f_3 x_3-mal osztva van, egyedi megoldások esetén megkaptuk a 0. megoldást, az 1. megoldást, a 3.* megoldást, a teljes 5. megoldást, valamint a 7.* megoldást.

4.6. Az s függvény meghatározása az f_i függvények alapján

Ebben a fejezetben s függvényt a négyféle feltételek mellett elõállított függvények alapján határozzuk meg. Az s függvény meghatározásához a (2.4-6) egyenletek szolgálnak, illetve a (3.159) összefüggések.

Tekintettel arra, hogy az 1-6. megoldásokhoz tartózó s függvényeket már elõállítottuk, ezért itt csak a 7. megoldáshoz tartozó s függvényt állítjuk elõ.

A 7. megoldáshoz tartózó s függvény

A (3.159) összefüggés alapján meghatározzuk az s_1 függvényeket.

Elsõnek az s_1 függvényt

$$\overset{7}{s}_1 = -\int x_3 \overset{7}{F}_3(x_3) x_1 dx_1 = -\overset{7}{F}_3(x_3) x_3 \frac{x_1^2}{2} . \tag{4.208a}$$

Másodiknak az s_2 függvényt.

$$\overset{7}{s}_2 = \int x_3 \overset{7}{F}_3(x_3) dx_2 = x_3 \overset{7}{F}_3(x_3) x_2 . \tag{4.208b}$$

Végül az s_3 függvényt.

$$\overset{7}{s}_3 = -\int \frac{dx_3 \overset{7}{F}_3(x_3)}{dx_3} \left(\frac{x_1^2}{2} - x_2 \right) dx_3 = -x_3 \overset{7}{F}_3(x_3) \left(\frac{x_1^2}{2} - x_2 \right) . \tag{4.208c}$$

Ezek alapján az s függvény:

$$\overset{7}{s} = -x_3 \overset{7}{F}_3(x_3) \left(\frac{x_1^2}{2} - x_2 \right) . \tag{4.209}$$

Ellenõrzés

Triviális

5. AZ f_i FÜGGVÉNYEK LEGÁLTALÁNOSABB ALAKJA

5.1. Általános megjegyzések

A (2.7) egyenletben csak az x_1 és x_2 változók szerinti parciális differenciálhányadosok szerepelnek. Ennek megfelelõen a (2.7) egyenletet kétféleképpen lehet kielégíteni. Egyrészt, ha az egyenletben szereplõ minden tag csak az x_1, x_2 koordinátáktól függ. Tehát

$$x_3 \frac{\partial f_3}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial x_1 f_3}{\partial x_2} - x_3 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \mathrm{F}_3(x_1, x_2) . \tag{5.1}$$

Az (1) összefüggésbõl következik, hogy

$$f_2 = f_2(x_1, x_2)/x_3 , \tag{5.2a}$$

$$f_3 = f_3(x_1, x_2)/x_3 . \tag{5.2b}$$

Másrészt, ha minden egyes összeadandó azonos mód függ az x_3 koordinátától. Tehát

$$x_3\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1}+\frac{\partial x_1 f_3}{\partial x_2}-\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)\cdot \mathrm{G}_3(x_3)=0\,. \tag{5.3}$$

A (3) összefüggésbõl következik, hogy

$$f_2 = f_2(x_1,x_2)\cdot \mathrm{G}_3(x_3)\,, \tag{5.4a}$$

$$f_3 = f_3(x_1,x_2)\cdot \mathrm{G}_3(x_3)\,. \tag{5.4b}$$

A (2.8) egyenletben csak az x_2 és x_3 változók szerinti parciális differenciálhányadosok szerepelnek. Ennek megfelelõen a (2.8) egyenletet (is) kétféleképpen lehet kielégíteni. Elõször, ha az egyenletben szereplõ minden tag csak az x_2, x_3 koordinátáktól függ. Tehát

$$\frac{\partial x_3 f_3}{\partial x_3}-\frac{\partial f_1}{\partial x_2}=\mathrm{F}_1(x_2,x_3)\,. \tag{5.5}$$

Az (5) összefüggésbõl következik, hogy

$$f_1 = f_1(x_2,x_3)\,, \tag{5.6a}$$

$$f_3 = f_3(x_2,x_3)\,. \tag{5.6b}$$

Másodszor azt tekintjük, amikor minden egyes összeadandó azonos mód függ az x_1 koordinátától. Tehát

$$\left(\frac{\partial x_3 f_3}{\partial x_3}-\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)\cdot \mathrm{G}_1(x_1)=0\,. \tag{5.7}$$

A (7) összefüggésbõl következik, hogy

$$f_1 = f_1(x_2,x_3)\cdot \mathrm{G}_1(x_1)\,, \tag{5.8a}$$

$$f_3 = f_3(x_2,x_3)\cdot \mathrm{G}_1(x_1)\,. \tag{5.8b}$$

A (2.9) egyenletben csak az x_3 és x_1 változók szerinti parciális differenciálhányadosok szerepelnek. Ennek megfelelõen a (2.9) egyenlet esetében a kétféle megoldás típust szintén elkülönítjük. Elsõnek azt, amely független az x_2 koordinátától. Tehát

$$\frac{\partial x_3 f_2}{\partial x_3}-\frac{\partial x_1 x_3 f_3}{\partial x_3}-\frac{\partial f_1}{\partial x_1}=\mathrm{F}_2(x_1,x_3)\,. \tag{5.9}$$

A (9) összefüggésbõl következik, hogy

$$f_1 = f_1(x_1,x_3)\,, \tag{5.10a}$$

$$f_2 = f_2(x_1,x_3)\,, \tag{5.10b}$$

$$f_3 = f_3(x_1, x_3)\,. \tag{5.10c}$$

Másodiknak azt, amikor minden egyes összeadandó azonos mód függ az x_2 koordinátától. Tehát

$$\left(\frac{\partial x_3 f_2}{\partial x_3} - \frac{\partial x_1 x_3 f_3}{\partial x_3} - \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)\cdot \mathrm{G}_2(x_2) = 0\,. \tag{5.11}$$

A (11) összefüggésbõl következik, hogy

$$f_1 = f_1(x_1, x_3)\cdot \mathrm{G}_2(x_2)\,, \tag{5.12a}$$

$$f_2 = f_2(x_1, x_3)\cdot \mathrm{G}_2(x_2)\,, \tag{5.12b}$$

$$f_3 = f_3(x_1, x_3)\cdot \mathrm{G}_2(x_2)\,. \tag{5.12c}$$

Ez az utóbbi eset – ha a (2.8) egyenletre nézünk, azonnal látszik, hogy – speciális, amennyiben rögtön a

$$\frac{d\mathrm{G}_2(x_2)}{dx_2} = \mathrm{G}_2(x_2)\,, \tag{5.13}$$

egyenletre vezet. Mivel a (2.9) egyenletben az f_1 és f_3 közül egyik sincsen x_2 szerint deriválva, ezért ha (2.8) szerint az f_3-hoz tartózó $g(x_3)$ függvény az f_1-hez tartózó $g(x_3)$ függvény x_2 szerinti differenciálja, akkor (2.9) kielégíthetõ úgy is, ha az f_2 függvény két részbõl áll: az egyik a $g(x_3)$ függvényt, a másik annak differenciálját tartalmazza. Azaz

$$f_1 = f_1(x_1, x_3)\cdot \mathrm{G}_2(x_2)\,, \tag{5.14a}$$

$$f_2 = \overset{1}{f}_2(x_1, x_3)\cdot \mathrm{G}_2(x_2) + \overset{2}{f}_2(x_1, x_3)\frac{d\mathrm{G}_2(x_2)}{dx_2}\,, \tag{5.14b}$$

$$f_3 = f_3(x_1, x_3)\frac{d\mathrm{G}_2(x_2)}{dx_2}\,. \tag{5.14c}$$

Az világos, hogy a (14) alatti eset az általánosabb; amennyiben (13) fennáll, úgy (12) összefüggésekhez jutunk. És az is világos, hogy a (14) megoldás „részlegesen” (x_2-ben) kielégíti a (2.8) egyenletet.

A három lehetséges megoldás-típust külön-külön vizsgáljuk meg.

5.2. Az 1. típusú megoldás vizsgálata

Elõször a (2.8) összefüggésbõl nyert megoldástípust vizsgáljuk. (6) és (8) figyelembevételével a megoldást

$$f_1 = \overset{0}{f}_1(x_2, x_3) + \overset{1}{f}_1(x_2, x_3)\cdot \mathrm{G}_1(x_1)\,, \tag{5.15a}$$

$$f_2 = f_2\,, \tag{5.15b}$$

$$f_3 = \overset{0}{f}_3(x_2,x_3) + \overset{1}{f}_3(x_2,x_3)\cdot \mathrm{G}_1(x_1) \tag{5.15c}$$

alakban keressük.

Itt értelemszerûen $\mathrm{G}_1(x_1) \neq const$.

A (15) összefüggéseket egyaránt behelyettesítjük (2.7)-be és (2.9)-be, átrendezzük $x_3 f_2$ parciális deriváltjaira

$$\text{(2.7)}\qquad \frac{\partial x_3 f_2}{\partial x_2} = x_1 \frac{\partial x_3\left(\overset{0}{f}_3(x_2,x_3) + \overset{1}{f}_3(x_2,x_3)\cdot \mathrm{G}_1(x_1)\right)}{\partial x_2} + x_3\,\overset{1}{f}_3(x_2,x_3)\frac{d\mathrm{G}_1(x_1)}{dx_1}\,. \tag{5.16}$$

$$\text{(2.9)}\qquad \frac{\partial x_3 f_2}{\partial x_3} = x_1 \frac{\partial x_3\left(\overset{0}{f}_3(x_2,x_3) + \overset{1}{f}_3(x_2,x_3)\cdot \mathrm{G}_1(x_1)\right)}{\partial x_3} + \overset{1}{f}_1(x_2,x_3)\frac{d\mathrm{G}_1(x_1)}{dx_1}\,. \tag{5.17}$$

A (16-17) összefüggésekbõl f_2 egyértelmûen meghatározható, ha fennáll az alábbi integrálhatósági feltétel:

$$\frac{\partial x_3\,\overset{1}{f}_3(x_2,x_3)}{\partial x_3} = \frac{\partial\,\overset{1}{f}_1(x_2,x_3)}{\partial x_2}\,. \tag{5.18}$$

Ekkor, integrálva (16), vagy (17) összefüggést, nyerjük:

$$x_3 f_2 = x_1 x_3\left(\overset{0}{f}_3(x_2,x_3) + \overset{1}{f}_3(x_2,x_3)\cdot \mathrm{G}_1(x_1)\right) + x_3\,\overset{2}{f}_2(x_2,x_3)\frac{d\mathrm{G}_1(x_1)}{dx_1} + \overset{0}{\mathrm{F}}_2(x_1)\,, \tag{5.19}$$

ahonnét

$$f_2 = x_1\,\overset{0}{f}_3(x_2,x_3) + \overset{1}{f}_3(x_2,x_3)\cdot \mathrm{G}_1(x_1)x_1 + \overset{2}{f}_2(x_2,x_3)\frac{d\mathrm{G}_1(x_1)}{dx_1} + \overset{0}{\mathrm{F}}_2(x_1)/x_3\,. \tag{5.20}$$

Az integrálás feltételét felhasználva megmutatható, hogy

$$\frac{\partial\,\overset{2}{f}_2(x_2,x_3)}{\partial x_2} = \overset{1}{f}_3(x_2,x_3)\,, \tag{5.21}$$

és

$$\frac{\partial x_3\,\overset{2}{f}_2(x_2,x_3)}{\partial x_3} = \overset{1}{f}_1(x_2,x_3)\,. \tag{5.22}$$

Ezután (15) felírható az alábbi alakba.

$$f_1 = \overset{0}{f_1}(x_2, x_3) + \frac{\partial x_3\ \overset{2}{f_2}(x_2, x_3)}{\partial x_3}\mathrm{G}_1(x_1)\,, \tag{5.23a}$$

$$f_2 = \overset{0}{\mathrm{F}_2}(x_1)/x_3 + x_1\ \overset{0}{f_3}(x_2, x_3) + \frac{\partial\ \overset{2}{f_2}(x_2, x_3)}{\partial x_2}\mathrm{G}_1(x_1)x_1 + \overset{2}{f_2}(x_2, x_3)\frac{d\mathrm{G}_1(x_1)}{dx_1}\,, \tag{5.23b}$$

$$f_3 = \overset{0}{f_3}(x_2, x_3) + \frac{\partial\ \overset{2}{f_2}(x_2, x_3)}{\partial x_2}\mathrm{G}_1(x_1)\,. \tag{5.23c}$$

Vizsgáljuk meg a (2.8) egyenletet!

$$(8)\quad \frac{\partial}{\partial x_3}\left(x_3\ \overset{0}{f_3}(x_2, x_3) + x_3\frac{\partial\ \overset{2}{f_2}(x_2, x_3)}{\partial x_2}\mathrm{G}_1(x_1)\right) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\overset{0}{f_1}(x_2, x_3) + \frac{\partial x_3\ \overset{2}{f_2}(x_2, x_3)}{\partial x_3}\mathrm{G}_1(x_1)\right), \tag{5.24}$$

ami akkor teljesül, ha a

$$\frac{\partial x_3\ \overset{0}{f_3}(x_2, x_3)}{\partial x_3} = \frac{\partial\ \overset{0}{f_1}(x_2, x_3)}{\partial x_2} \tag{5.25}$$

feltétel fennáll.

A (25) egyenlet megegyezik a már tárgyalt (3.20) egyenlettel, továbbá itt is fennáll az $\overset{0}{f_2} = x_1\ \overset{0}{f_3}$ összefüggés, tehát (3.30a,c) alapján írhatjuk, hogy

$$\overset{0}{f_1}(x_2, x_3) = \overset{2}{F_2}(x_2)\frac{dx_3\ \overset{2}{F_3}(x_3)}{dx_3}\,, \tag{5.26a}$$

$$\overset{0}{f_3}(x_2, x_3) = \frac{d\ \overset{2}{F_2}(x_2)}{dx_2}\overset{2}{F_3}(x_3)\,. \tag{5.26b}$$

Ezek figyelembevételével a három f_i függvény.

$$f_1 = \overset{2}{F_2}(x_2)\frac{dx_3\ \overset{2}{F_3}(x_3)}{dx_3} + \frac{\partial x_3\ \overset{2}{f_2}(x_2, x_3)}{\partial x_3}\mathrm{G}_1(x_1)\,, \tag{5.27a}$$

$$f_2 = x_1\frac{d\ \overset{2}{F_2}(x_2)}{dx_2}\overset{2}{F_3}(x_3) + \frac{\partial\ \overset{2}{f_2}(x_2, x_3)}{\partial x_2}\mathrm{G}_1(x_1)x_1 + \overset{2}{f_2}(x_2, x_3)\frac{d\mathrm{G}_1(x_1)}{dx_1} + \overset{0}{F_1}(x_1)/x_3\,, \tag{5.27b}$$

$$f_3 = \frac{d\ \overset{2}{F_2}(x_2)}{dx_2}\overset{2}{F_3}(x_3) + \frac{\partial\ \overset{2}{f_2}(x_2, x_3)}{\partial x_2}\mathrm{G}_1(x_1)\,. \tag{5.27c}$$

Ellenõrzés.

Az ellenõrzés során a 2. megoldás függvényeit, illetve az integrálási szabad függvényt nem írjuk, ki azok kielégítik a (2.7-9) egyenletrendszert.

(2.7)
$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_3\frac{\partial \overset{2}{f}_2(x_2,x_3)}{\partial x_2}\mathrm{G}_1(x_1)x_1+x_3\overset{2}{f}_2(x_2,x_3)\frac{d\mathrm{G}_1(x_1)}{dx_1}\right)-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_1x_3\frac{\partial \overset{2}{f}_2(x_2,x_3)}{\partial x_2}\mathrm{G}_1(x_1)\right)=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_3\frac{\partial \overset{2}{f}_2(x_2,x_3)}{\partial x_2}\mathrm{G}_1(x_1)\right). \tag{5.28}$$

Ez azonosan teljesül.

(2.8)
$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(x_3\frac{\partial \overset{2}{f}_2(x_2,x_3)}{\partial x_2}\mathrm{G}_1(x_1)\right)=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial x_3\overset{2}{f}_2(x_2,x_3)}{\partial x_3}\mathrm{G}_1(x_1)\right). \tag{5.29}$$

Ez is azonosan teljesül.

(2.9)
$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(x_3\frac{\partial \overset{2}{f}_2(x_2,x_3)}{\partial x_2}\mathrm{G}_1(x_1)x_1+x_3\overset{2}{f}_2(x_2,x_3)\frac{d\mathrm{G}_1(x_1)}{dx_1}\right)-\frac{\partial}{\partial x_3}\left(x_1x_3\frac{\partial \overset{2}{f}_2(x_2,x_3)}{\partial x_2}\mathrm{G}_1(x_1)\right)=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial x_3\overset{2}{f}_2(x_2,x_3)}{\partial x_3}\mathrm{G}_1(x_1)\right). \tag{5.30}$$

Ez szintén azonosan teljesül.

5.3. A 2. típusú megoldás vizsgálata

Másodszor a (2.9) összefüggéssel nyert megoldástípussal foglalkozunk. Ezt tekintjük a 2. típusú megoldásnak.

A (10) és (14) alapján az f_i (i = 1,2,3) függvényeket az alábbi formában keressük.

$$f_1=\overset{0}{f}_1(x_1,x_3)+\overset{1}{f}_1(x_1,x_3)\cdot\mathrm{G}_2(x_2)\,, \tag{5.31a}$$

$$f_2=\overset{0}{f}_2(x_1,x_3)+\overset{1}{f}_2(x_1,x_3)\cdot\mathrm{G}_2(x_2)+\overset{2}{f}_2(x_1,x_3)\frac{d\mathrm{G}_2(x_2)}{dx_2}\,, \tag{5.31b}$$

$$f_3=\overset{0}{f}_3(x_1,x_3)+\overset{1}{f}_3(x_1,x_3)\frac{d\mathrm{G}_2(x_2)}{dx_2}\,. \tag{5.31c}$$

Itt értelemszerûen $\mathrm{G}_2(x_2)\neq const$.

Behelyettesítjük (31)-et (2.8)-ba.

$$\frac{\partial x_3\overset{0}{f}_3(x_1,x_3)}{\partial x_3}+\frac{\partial x_3\overset{1}{f}_3(x_1,x_3)}{\partial x_3}\frac{d\mathrm{G}_2(x_2)}{dx_2}=\frac{\partial\overset{0}{f}_1(x_1,x_3)}{\partial x_2}+\overset{1}{f}_1(x_1,x_3)\frac{d\mathrm{G}_2(x_2)}{dx_2}\,. \tag{5.32}$$

Innét

$$\frac{\partial x_3 \overset{0}{f_3}(x_1,x_3)}{\partial x_3} = 0\,, \tag{5.33}$$

amelynek az integrálja

$$\overset{0}{f_3}(x_1,x_3) = \overset{0}{F_3}(x_1)/x_3\,. \tag{5.34}$$

Továbbá (32) alapján

$$\overset{1}{f_1}(x_1,x_3) = \frac{\partial x_3 \overset{1}{f_3}(x_1,x_3)}{\partial x_3}\,. \tag{5.35}$$

A nyert összefüggéseket (31)-be helyettesítve

$$f_1 = \overset{0}{f_1}(x_1,x_3) + \frac{\partial x_3 \overset{1}{f_3}(x_1,x_3)}{\partial x_3}\mathrm{G}_2(x_2)\,, \tag{5.36a}$$

$$f_2 = \overset{0}{f_2}(x_1,x_3) + \overset{1}{f_2}(x_1,x_3)\cdot \mathrm{G}_2(x_2) + \overset{2}{f_2}(x_1,x_3)\frac{d\mathrm{G}_2(x_2)}{dx_2}\,, \tag{5.36b}$$

$$f_3 = \overset{1}{f_3}(x_1,x_3)\frac{d\mathrm{G}_2(x_2)}{dx_2} + \overset{0}{F_3}(x_1)/x_3\,. \tag{5.36c}$$

Ezeket behelyettesítve a (2.7) összefüggésbe, nyerjük.

$$\begin{aligned} x_3\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\overset{0}{f_2}(x_1,x_3) + \overset{1}{f_2}(x_1,x_3)\cdot \mathrm{G}_2(x_2) + \overset{2}{f_2}(x_1,x_3)\frac{d\mathrm{G}_2(x_2)}{dx_2}\right) - \\ - x_1x_3\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\overset{1}{f_3}(x_1,x_3)\frac{d\mathrm{G}_2(x_2)}{dx_2} + \overset{0}{F_3}(x_1)/x_3\right) = \\ = x_3\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\overset{1}{f_3}(x_1,x_3)\frac{d\mathrm{G}_2(x_2)}{dx_2} + \overset{0}{F_3}(x_1)/x_3\right) \end{aligned} \tag{5.37}$$

Ebbõl egyrészt

(c) $$\frac{d\overset{0}{F_3}(x_1)}{dx_1} = 0\,, \tag{5.38}$$

amelynek az integrálja

$$\overset{0}{F_3}(x_1) = \overset{0}{C}\,, \tag{5.39}$$

másrészt

$$\frac{\partial \mathrm{G}_2(x_2)}{\partial x_2} \qquad \overset{1}{f}_2(x_1,x_3)=\frac{\partial \overset{1}{f}_3(x_1,x_3)}{\partial x_1}, \tag{5.40}$$

harmadrészt

$$\frac{\partial^2 \mathrm{G}_2(x_2)}{\partial {x_2}^2} \qquad \overset{2}{f}_2(x_1,x_3)=x_1\,\overset{1}{f}_3(x_1,x_3)\,. \tag{5.41}$$

A keresett függvények alakja ezek figyelembe vételével

$$f_1=\overset{0}{f}_1(x_1,x_3)+\frac{\partial x_3\,\overset{1}{f}_3(x_1,x_3)}{\partial x_3}\mathrm{G}_2(x_2)\,, \tag{5.42a}$$

$$f_2=\overset{0}{f}_2(x_1,x_3)+\frac{\partial\,\overset{1}{f}_3(x_1,x_3)}{\partial x_1}\mathrm{G}_2(x_2)+x_1\,\overset{1}{f}_3(x_1,x_3)\frac{d\mathrm{G}_2(x_2)}{dx_2}\,, \tag{5.42b}$$

$$f_3=\overset{1}{f}_3(x_1,x_3)\frac{d\mathrm{G}_2(x_2)}{dx_2}+\overset{0}{C}_3/\,x_3\,. \tag{5.42c}$$

Ezeket behelyettesítve a (2.9) összefüggésbe, kapjuk.

$$(2.9)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_3}x_3\left(\overset{0}{f}_2(x_1,x_3)+\frac{\partial\,\overset{1}{f}_3(x_1,x_3)}{\partial x_1}\mathrm{G}_2(x_2)+x_1\,\overset{1}{f}_3(x_1,x_3)\frac{d\mathrm{G}_2(x_2)}{dx_2}\right)-\\ &-x_1\frac{\partial}{\partial x_3}x_3\left(\overset{1}{f}_3(x_1,x_3)\frac{d\mathrm{G}_2(x_2)}{dx_2}+\overset{0}{C}_3/\,x_3\right)=\\ &=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\overset{0}{f}_1(x_1,x_3)+\frac{\partial x_3\,\overset{1}{f}_3(x_1,x_3)}{\partial x_3}\mathrm{G}_2(x_2)\right). \end{aligned} \tag{5.43}$$

Az x_2-tõl függõ tagok kiesnek, továbbá a konstans-per-x_3 is, tehát (43) akkor teljesül, ha a

$$\frac{\partial x_3\,\overset{0}{f}_2(x_1,x_3)}{\partial x_3}=\frac{\partial\,\overset{0}{f}_1(x_1,x_3)}{\partial x_1} \tag{5.44}$$

összefüggés fennáll.

Ez az egyenlet megegyezik a (3.34c) alatt felírt egyenlettel. A megoldást átvesszük (3.45a,b) alapján.

$$\overset{0}{f}_1(x_1,x_3)=\overset{3}{F}_1(x_1)\frac{dx_3\,\overset{3}{F}_3(x_3)}{dx_3}\,, \tag{5.45a}$$

$$\overset{0}{f}_2(x_1,x_3)=\frac{d\overset{3}{F}_1(x_1)}{dx_1}\overset{3}{F}_3(x_3)\,. \tag{5.45b}$$

A három f_i függvény végleges alakja:

$$f_1=\overset{3}{F}_1(x_1)\frac{dx_3\,\overset{3}{F}_3(x_3)}{dx_3}+\frac{dx_3\,\overset{1}{f}_3(x_1,x_3)}{dx_3}\mathrm{G}_2(x_2)\,, \tag{5.46a}$$

$$f_2=\frac{d\overset{3}{F}_1(x_1)}{dx_1}\overset{3}{F}_3(x_3)+\frac{\partial\,\overset{1}{f}_3(x_1,x_3)}{\partial x_1}\mathrm{G}_2(x_2)+x_1\,\overset{1}{f}_3(x_1,x_3)\frac{d\mathrm{G}_2(x_2)}{dx_2}\,, \tag{5.46b}$$

$$f_3=\overset{1}{f}_3(x_1,x_3)\frac{d\mathrm{G}_2(x_2)}{dx_2}+\overset{0}{C}_3/\,x_3\,. \tag{5.46c}$$

Ellenõrzés.

Az ellenõrzés során a 3. megoldás függvényeit, illetve az integrálási szabad függvényt nem írjuk ki, azok kielégítik a (2.7-9) egyenletrendszert.

(2.7)
$$\begin{aligned}&x_3\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\,\overset{1}{f}_3(x_1,x_3)}{\partial x_1}\mathrm{G}_2(x_2)+x_1\,\overset{1}{f}_3(x_1,x_3)\frac{d\mathrm{G}_2(x_2)}{dx_2}\right)-\\&-x_1x_3\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\overset{1}{f}_3(x_1,x_3)\frac{d\mathrm{G}_2(x_2)}{dx_2}\right)=x_3\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\overset{1}{f}_3(x_1,x_3)\frac{d\mathrm{G}_2(x_2)}{dx_2}\right),\end{aligned} \tag{5.47}$$

ami teljesül.

(2.8)
$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(x_3\,\overset{1}{f}_3(x_1,x_3)\frac{d\mathrm{G}_2(x_2)}{dx_2}\right)=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial x_3\,\overset{1}{f}_3(x_1,x_3)}{\partial x_3}\mathrm{G}_2(x_2)\right), \tag{5.48}$$

ami szintén teljesül.

(2.9)
$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_3}x_3\left(\frac{\partial\,\overset{1}{f}_3(x_1,x_3)}{\partial x_1}\mathrm{G}_2(x_2)+x_1\,\overset{1}{f}_3(x_1,x_3)\frac{d\mathrm{G}_2(x_2)}{dx_2}\right)-\\&-x_1\frac{\partial}{\partial x_3}\left(x_3\,\overset{1}{f}_3(x_1,x_3)\frac{d\mathrm{G}_2(x_2)}{dx_2}\right)=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{dx_3\,\overset{1}{f}_3(x_1,x_3)}{dx_3}\mathrm{G}_2(x_2)\right),\end{aligned} \tag{5.49}$$

ami szintúgy teljesül.

5.4. A 3. típusú megoldás vizsgálata

Végezetül a (2.7) összefüggésbõl nyert megoldást vizsgáljuk. A (2) és (4) figyelembe vételével

$$f_1 = f_1, \tag{5.50a}$$

$$f_2 = \overset{0}{f}_2(x_1, x_2)/x_3 + \overset{1}{f}_2(x_1, x_2)\cdot \mathrm{G}_3(x_3)\,, \tag{5.50b}$$

$$f_3 = \overset{0}{f}_3(x_1, x_2)/x_3 + \overset{1}{f}_3(x_1, x_2)\cdot \mathrm{G}_3(x_3)\,. \tag{5.50c}$$

alakban keressük.

Itt is értelemszerûen $\mathrm{G}_3(x_3) \neq const$.

A továbbiakban (50) összefüggéseket behelyettesítjük elõször (2.8)-be, majd (2.9)-be.

(2.8)
$$\frac{\partial}{\partial x_2} f_1 = \frac{\partial x_3\ \overset{0}{f}_3(x_1, x_2)/x_3}{\partial x_3} + \frac{\partial x_3\ \overset{1}{f}_3(x_1, x_2)\cdot \mathrm{G}_3(x_3)}{\partial x_3}\,. \tag{5.51}$$

(2.9)
$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1} f_1 &= \frac{\partial x_3\ \overset{0}{f}_2(x_1, x_2)/x_3}{\partial x_3} + \frac{\partial x_3\ \overset{1}{f}_2(x_1, x_2)\cdot \mathrm{G}_3(x_3)}{\partial x_3} - \\ &- x_1\left(\frac{\partial x_3\ \overset{0}{f}_3(x_1, x_2)/x_3}{\partial x_3} + \frac{\partial x_3\ \overset{1}{f}_3(x_1, x_2)\cdot \mathrm{G}_3(x_3)}{\partial x_3}\right)\end{aligned} \tag{5.52}$$

Átalakítva, és a $x_3 G_3(x_3)$ függvényt kiemelve

$$\frac{\partial}{\partial x_2} f_1 = \overset{1}{f}_3(x_1, x_2)\frac{dx_3\mathrm{G}_3(x_3)}{dx_3}\,, \tag{5.53}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f_1 = \left(\overset{1}{f}_2(x_1, x_2) - x_1\ \overset{1}{f}_3(x_1, x_2)\right)\frac{dx_3\mathrm{G}_3(x_3)}{dx_3}\,. \tag{5.54}$$

Az integrálhatóság feltétele

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\overset{1}{f}_3(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\overset{1}{f}_2(x_1, x_2) - x_1\ \overset{1}{f}_3(x_1, x_2)\right). \tag{5.55}$$

Amennyiben (55) teljesül, úgy f_1-et

$$f_1 = \overset{0}{f}_1(x_3) + \overset{1}{f}_1(x_1, x_2)\frac{dx_3\mathrm{G}_3(x_3)}{dx_3}\,. \tag{5.56}$$

alakban lehet felvenni. E mellett teljesülnie kell az

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\overset{1}{f}_1(x_1, x_2) = \overset{1}{f}_3(x_1, x_2), \tag{5.57}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\overset{1}{f}_1(x_1, x_2) = \overset{1}{f}_2(x_1, x_2) - x_1\ \overset{1}{f}_3(x_1, x_2) \tag{5.58}$$

összefüggéseknek is.

Ez utóbbiak alapján felírhatók a következõ összefüggések.

$$\overset{1}{f}_3(x_1,x_2)=\frac{\partial}{\partial x_2}\overset{1}{f}_1(x_1,x_2)\,. \qquad (5.59)$$

$$\overset{1}{f}_2(x_1,x_2)=\frac{\partial}{\partial x_1}\overset{1}{f}_1(x_1,x_2)+x_1\overset{1}{f}_3(x_1,x_2)=\frac{\partial}{\partial x_1}\overset{1}{f}_1(x_1,x_2)+x_1\frac{\partial}{\partial x_2}\overset{1}{f}_1(x_1,x_2)\,. \qquad (5.60)$$

Ezt követõen (50) az alábbi alakba írható fel.

$$f_1=\overset{0}{f}_1(x_3)+\overset{1}{f}_1(x_1,x_2)\frac{dx_3 G_3(x_3)}{dx_3}\,, \qquad (5.61a)$$

$$f_2=\overset{0}{f}_2(x_1,x_2)/x_3+\left(\frac{\partial\overset{1}{f}_1(x_1,x_2)}{\partial x_1}+x_1\frac{\partial\overset{1}{f}_1(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right)\cdot G_3(x_3)\,, \qquad (5.61b)$$

$$f_3=\overset{0}{f}_3(x_1,x_2)/x_3+\frac{\partial\overset{1}{f}_1(x_1,x_2)}{\partial x_2}G_3(x_3)\,. \qquad (5.61c)$$

A (61) összefüggéseket behelyettesítjük a (2.7) egyenletbe:

$$\begin{aligned}(2.7)\qquad &\frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_3\overset{0}{f}_2(x_1,x_2)/x_3+x_3\left(\frac{\partial\overset{1}{f}_1(x_1,x_2)}{\partial x_1}+x_1\frac{\partial\overset{1}{f}_1(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right)\cdot G_3(x_3)\right)-\\ &-\frac{\partial}{\partial x_2}x_1x_3\left(\overset{0}{f}_3(x_1,x_2)/x_3+\frac{\partial\overset{1}{f}_1(x_1,x_2)}{\partial x_2}G_3(x_3)\right)= \qquad (5.62)\\ &=\frac{\partial}{\partial x_1}x_3\left(\overset{0}{f}_3(x_1,x_2)/x_3+\frac{\partial\overset{1}{f}_1(x_1,x_2)}{\partial x_2}G_3(x_3)\right).\end{aligned}$$

Ez akkor áll fenn, ha

$$\frac{\partial\overset{0}{f}_2(x_1,x_2)}{\partial x_2}-x_1\frac{\partial\overset{0}{f}_3(x_1,x_2)}{\partial x_2}=\frac{\partial\overset{0}{f}_3(x_1,x_2)}{\partial x_1} \qquad (5.63)$$

teljesül.

A (63) egyenletet már megoldottuk, maga az egyenlet a (3.139) alatti egyenlettel egyezik meg, ezért az 5. megoldáshoz jutunk el. A megoldást a (3.140b,c) összefüggések alapján az alábbi képletek adják.

$$\overset{0}{f}_2(x_1,x_2)/x_3=\left(\overset{51}{F}_1(x_1)x_1+\frac{d\overset{51}{F}_1(x_1)}{dx_1}\right)e^{x_2}/x_3+x_1e^{\frac{x_1^2}{2}}\left(\overset{52}{F}_2(x_2)+\frac{d\overset{52}{F}_2(x_2)}{dx_2}\right)/x_3+$$

$$+\frac{d\overset{53}{F}_1(x_1)}{dx_1}x_2/x_3+\overset{54}{F}_2(x_2)x_1/x_3+\overset{0}{F}_1(x_1)/x_3, \tag{5.64a}$$

$$\begin{gathered}\overset{0}{f}_3(x_1,x_2)/x_3=\overset{51}{F}_1(x_1)e^{x_2}/x_3+e^{\frac{x_1^2}{2}}\frac{d\overset{52}{F}_2(x_2)}{dx_2}/x_3+\\+\overset{53}{F}_1(x_1)/x_3+\overset{54}{F}_2(x_2)/x_3+\overset{1}{C}_1\left(\frac{x_1^2}{2}-x_2\right)/x_3+\overset{1}{C}_2e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}/x_3+\overset{0}{C}/x_3.\end{gathered} \tag{5.64b}$$

Ezek figyelembe vételével a három f_i függvény:

$$f_1=\overset{0}{F}_3(x_3)+\overset{1}{f}_1(x_1,x_2)\frac{dx_3\mathrm{G}_3(x_3)}{dx_3}, \tag{5.65a}$$

$$\begin{gathered}f_2=\left(\frac{\partial\overset{1}{f}_1(x_1,x_2)}{\partial x_1}+x_1\frac{\partial\overset{1}{f}_1(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right)\cdot\mathrm{G}_3(x_3)+\left(\overset{51}{F}_1(x_1)x_1+\frac{d\overset{51}{F}_1(x_1)}{dx_1}\right)e^{x_2}/x_3+\\+x_1e^{\frac{x_1^2}{2}}\left(\overset{52}{F}_2(x_2)+\frac{d\overset{52}{F}_2(x_2)}{dx_2}\right)/x_3+\frac{d\overset{53}{F}_1(x_1)}{dx_1}x_2/x_3+\overset{54}{F}_2(x_2)x_1/x_3+\overset{0}{F}_1(x_1)/x_3,\end{gathered} \tag{5.65b}$$

$$\begin{gathered}f_3=\frac{\partial\overset{1}{f}_1(x_1,x_2)}{\partial x_2}\mathrm{G}_3(x_3)+\overset{51}{F}_1(x_1)e^{x_2}/x_3+e^{\frac{x_1^2}{2}}\frac{d\overset{52}{F}_2(x_2)}{dx_2}/x_3+\\+\overset{53}{F}_1(x_1)/x_3+\overset{54}{F}_2(x_2)/x_3+\overset{1}{C}_1\left(\frac{x_1^2}{2}-x_2\right)/x_3+\overset{1}{C}_2e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}/x_3+\overset{0}{C}/x_3.\end{gathered} \tag{5.65c}$$

Ellenõrzés

Az ellenõrzés során a korábban megtalált 0., 1. és 5. megoldások függvényeit már nem vizsgáljuk, azok kielégítik a (2.7-9) egyenleteket.

(2.7)

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x_2}x_3\left(\frac{\partial\overset{1}{f}_1(x_1,x_2)}{\partial x_1}+x_1\frac{\partial\overset{1}{f}_1(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right)\cdot\mathrm{G}_3(x_3)-\\-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_1x_3\frac{\partial\overset{1}{f}_1(x_1,x_2)}{\partial x_2}\mathrm{G}_3(x_3)\right)=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_3\frac{\partial\overset{1}{f}_1(x_1,x_2)}{\partial x_2}\mathrm{G}_3(x_3)\right),\end{gathered} \tag{5.66}$$

ami azonosan teljesül.

(2.8)

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(x_3\frac{\partial\overset{1}{f}_1(x_1,x_2)}{\partial x_2}\mathrm{G}_3(x_3)\right)=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\overset{1}{f}_1(x_1,x_2)\frac{dx_3\mathrm{G}_3(x_3)}{dx_3}\right), \tag{5.67}$$

ami szintén azonosan teljesül.

(2.9)
$$\frac{\partial}{\partial x_3} x_3 \left(\frac{\partial \overset{1}{f}_1(x_1,x_2)}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial \overset{1}{f}_1(x_1,x_2)}{\partial x_2} \right) \cdot \mathrm{G}_3(x_3) - \\ - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(x_1 x_3 \frac{\partial \overset{1}{f}_1(x_1,x_2)}{\partial x_2} \mathrm{G}_3(x_3) \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\overset{1}{f}_1(x_1,x_2) \frac{d x_3 \mathrm{G}_3(x_3)}{d x_3} \right), \tag{5.68}$$

ami szintúgy azonosan teljesül.

5.5. A nyert megoldások összefoglalása és vizsgálata

1. Típusú

$$f_1 = \overset{2}{F}_2(x_2) \frac{d x_3 \overset{2}{F}_3(x_3)}{d x_3} + \frac{\partial x_3 \overset{2}{f}_2(x_2,x_3)}{\partial x_3} \mathrm{G}_1(x_1)\,, \tag{5.27a}$$

$$f_2 = x_1 \frac{d \overset{2}{F}_2(x_2)}{d x_2} \overset{2}{F}_3(x_3) + \frac{\partial \overset{2}{f}_2(x_2,x_3)}{\partial x_2} \mathrm{G}_1(x_1) x_1 + \overset{2}{f}_2(x_2,x_3) \frac{d \mathrm{G}_1(x_1)}{d x_1} + \overset{0}{F}_1(x_1)/x_3\,, \tag{5.27b}$$

$$f_3 = \frac{d \overset{2}{F}_2(x_2)}{d x_2} \overset{2}{F}_3(x_3) + \frac{\partial \overset{2}{f}_2(x_2,x_3)}{\partial x_2} \mathrm{G}_1(x_1)\,. \tag{5.27c}$$

2. Típusú

$$f_1 = \overset{3}{F}_1(x_1) \frac{d x_3 \overset{3}{F}_3(x_3)}{d x_3} + \frac{\partial x_3 \overset{1}{f}_3(x_1,x_3)}{\partial x_3} \mathrm{G}_2(x_2)\,, \tag{5.46a}$$

$$f_2 = \frac{d \overset{3}{F}_1(x_1)}{d x_1} \overset{3}{F}_3(x_3) + \frac{\partial \overset{1}{f}_3(x_1,x_3)}{\partial x_1} \mathrm{G}_2(x_2) + x_1 \overset{1}{f}_3(x_1,x_3) \frac{d \mathrm{G}_2(x_2)}{d x_2}\,, \tag{5.46b}$$

$$f_3 = \overset{1}{f}_3(x_1,x_3) \frac{d \mathrm{G}_2(x_2)}{d x_2} + \overset{0}{C}/x_3\,. \tag{5.46c}$$

3. Típusú

$$f_1 = \overset{1}{f}_1(x_1,x_2) \frac{d x_3 \mathrm{G}_3(x_3)}{d x_3} + \overset{0}{F}_3(x_3)\,, \tag{5.65a}$$

$$f_2 = \left(\frac{\partial \overset{1}{f}_1(x_1,x_2)}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial \overset{1}{f}_1(x_1,x_2)}{\partial x_2} \right) \cdot \mathrm{G}_3(x_3) + \left(\overset{51}{F}_1(x_1) x_1 + \frac{\partial \overset{51}{F}_1(x_1)}{\partial x_1} \right) e^{x_2}/x_3 + \\ + x_1 e^{\frac{x_1^2}{2}} \left(\overset{52}{F}_2(x_2) + \frac{d \overset{52}{F}_2(x_2)}{d x_2} \right) / x_3 + \frac{d \overset{53}{F}_1(x_1)}{d x_1} x_2/x_3 + \overset{54}{F}_2(x_2) x_1/x_3 + \overset{0}{F}_1(x_1)/x_3\,, \tag{5.65b}$$

$$f_3 = \frac{\partial \overset{1}{f}_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \mathsf{G}_3(x_3) + \overset{51}{F}_1(x_1) e^{x_2} / x_3 + e^{\frac{x_1^2}{2}} \frac{d \overset{52}{F}_2(x_2)}{d x_2} / x_3 +$$
$$+ \overset{53}{F}_1(x_1) / x_3 + \overset{54}{F}_2(x_2) / x_3 + \overset{1}{C}_1 \left(\frac{x_1^2}{2} - x_2 \right) / x_3 + \overset{1}{C}_2 e^{\frac{x_1^2}{2} - x_2} / x_3 + \overset{0}{C} / x_3. \tag{5.65c}$$

A megoldások áttekintése

A jobb áttekinthetõség kedvéért egy egységes táblázatba foglaljuk össze a megoldásokat. Ezen táblázatban a korábban már megtalált megoldásokat csak betûjelükkel tüntetjük fel. Végül alkalmazzuk a $f_{13}(x_1, x_2) = \overset{n}{F}_{12}(x_1, x_2)$ jelölést (n a *teljes* megoldás sorszáma).

	(2.8) (***1T***)	(2.9) (***2T***)	(2.7) (***3T***)	
$f_1 =$	$\overset{2}{\mathsf{F}}_1 + \partial_3(x_3 \overset{1}{F}_{23}) \cdot \mathsf{G}_1$	$\overset{3}{\mathsf{F}}_1 + \partial_3(x_3 \overset{2}{F}_{13}) \cdot \mathsf{G}_2$	$\overset{3}{F}_{12} \partial_3(x_3 \mathsf{G}_3)$	(5.69a)
$f_2 =$	$\overset{2}{\mathsf{F}}_2 + \partial_2(\overset{1}{F}_{23}) \cdot \mathsf{G}_1 x_1 + \overset{1}{F}_{23} \partial_1 \mathsf{G}_1$	$\overset{3}{\mathsf{F}}_2 + \partial_1(\overset{2}{F}_{13}) \cdot \mathsf{G}_2 + x_1 \overset{2}{F}_{13} \cdot \partial_2 \mathsf{G}_2$	$\overset{5}{\mathsf{F}}_2 + (\partial_1 \overset{3}{F}_{12} + x_1 \partial_2 \overset{3}{F}_{12}) \cdot \mathsf{G}_3(x_3)$	(5.69b)
$f_3 =$	$\overset{2}{\mathsf{F}}_3 + \partial_2(\overset{1}{F}_{23}) \cdot \mathsf{G}_1$	$\overset{2}{F}_{13} \cdot \partial_2 \mathsf{G}_2$	$\overset{0}{\mathsf{F}}_3 + \overset{1}{\mathsf{F}}_3 + \overset{5}{\mathsf{F}}_3 + \partial_2(\overset{3}{F}_{12}) \cdot \mathsf{G}_3(x_3)$	(5.69c)

Az összesítõ táblázat alapján az alábbi általános megállapítások tehetõk.

Mindhárom megoldás szerkezete azonos.

$$f_1 = \frac{\partial}{\partial x_3}(x_3(.)), \tag{5.70a}$$

$$f_2 = \frac{\partial}{\partial x_1}(.) + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}(.), \tag{5.70b}$$

$$f_3 = \frac{\partial}{\partial x_2}(.). \tag{5.70c}$$

Összevetve a (2.1-3) kifejezésekkel, megállapítható, hogy s helyett egy $s' = x_3 s$ függvényt tekintve a kettõ azonos. Magyarán, az argumentumokra való bontástól eltekintve mind a három megoldás – lásd a (27), (46) és (65) képleteket, illetve az összevont (69) összefüggéseket – azonos, és megegyezik a kiinduló feladatot meghatározó összefüggésekkel.

Az állítás igazolására tekintsük a

$$f_1 = \frac{\partial x_3 \mathsf{F}(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3}, \tag{5.71a}$$

$$f_2 = \frac{\partial \mathrm{F}\,(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial \mathrm{F}\,(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2}\,, \tag{5.71b}$$

$$f_3 = \frac{\partial \mathrm{F}\,(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} \tag{5.71c}$$

„megoldást”. Helyettesítsük be az integrálhatósági feltételekbe.

(2.7)
$$x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_2} - x_1 \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_2} \right) = x_3 \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_2}\,, \tag{5.72}$$

(2.8)
$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(x_3 \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial x_3 \mathrm{F}}{\partial x_3}\,, \tag{5.73}$$

(2.9)
$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(x_3 \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_1} + x_1 x_3 \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_2} - x_1 x_3 \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial x_3 \mathrm{F}}{\partial x_3}\,. \tag{5.74}$$

Mindhárom azonosan teljesül.

Az, hogy ez tautológia, vagy tétel, annak eldöntésével nem kívánunk foglalkozni. Ugyanakkor a formális logika szerint (72-74) igazolja, hogy az elvégzett számítások alapján elõállított (69) táblázat helytálló.

Természetesen felmerül az a kérdés, hogy általában igaz-e, hogy az értelmezõ egyenletek kielégítik az integrálhatósági feltételeket, vagy ez csak jelen, egyedi esetben áll fenn. Ezzel a kérdéssel, pontosabban ennek egy gyengített változatával a 6. pontban fogunk foglalkozni. Ezen túlmenõen, ismerve az f_i függvények szerkezét, most már feltehetõ az a kérdés is, hogy létezhet-e valamilyen kapcsolat az f_i függvények között, ha igen, akkor milyen, illetve a kapcsolatnak milyen következménye van, vagy lehet, ha nem, akkor miért nem. Erre a kérdésre a 7. pontban térünk vissza.

Ezeket megelõzõen megvizsgáljuk, hogy vajon az elõállított 1-7. részmegoldásokra vonatkozik-e az általános megoldás szerkezetére tett fenti állítás, illetve, hogy vajon függetlenek-e a három teljes megoldástól, vagy sem. Ez utóbbi esetben az a kérdés merül föl, hogy mi is a kapcsolat az általános és a részmegoldások között.

Egyes részmegoldások esetén világos, hogy a szerkezetük rendelkezik a (70), vagy (71) alatti megoldás szerkezetével, más részmegoldások esetén, ha nem is azonnal nyilvánvaló, de megmutatható, hogy a szerkezet megegyezik a fentebb említettel. Ennek részletes igazolásától eltekintünk. Viszont részletesen megmutatjuk, hogy az egyes általános megoldásból milyen függvényválasztással nyerjük az egyes részmegoldásokat. Ezzel egyrészt igazoljuk, hogy minden részmegoldás valamelyik általános megoldásból elõállítható, másrészt igazoljuk azt is, hogy a szerkezet megegyezik az általános megoldás szerkezetével.

A kapcsolatot táblázatos formában adjuk meg.

Az egyes általános megoldásokból a következõ részleges megoldások vezethetõk le.

	1T		2T		3T	
	$G_1(x_1)$	$\overset{1}{F}_{23}(x_2,x_3)$	$G_2(x_2)$	$\overset{2}{F}_{13}(x_1,x_3)$	$G_3(x_3)$	$\overset{3}{F}_{12}(x_1,x_2)$
11.	–	–	–	–	$1/x_3$	$-\overset{1}{C}_1\left(\frac{x_1^4}{8}-\frac{x_1^2}{2}x_2+\frac{x_2^2}{2}\right)$
12.	$e^{\frac{x_1^2}{2}}$	$-\overset{1}{C}_2 e^{-x_2}/x_3$	$-\overset{1}{C}_2 e^{-x_2}$	$e^{\frac{x_1^2}{2}}/x_3$	$1/x_3$	$-\overset{1}{C}_2 e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}$
2.	1	$\overset{2}{F}_2(x_2)\cdot\overset{2}{F}_3(x_3)$	$\overset{2}{F}_2(x_2)$	$\overset{2}{F}_3(x_3)$	$\overset{2}{F}_3(x_3)$	$\overset{2}{F}_2(x_2)$
3.	$\overset{3}{F}_1(x_1)$	$\overset{3}{F}_3(x_3)$	1	$\overset{3}{F}_3(x_3)\cdot\overset{3}{F}_1(x_1)$	$\overset{3}{F}_3(x_3)$	$\overset{3}{F}_1(x_1)$
4.	–	–	–	–	1	$\overset{4}{F}_{12}(x_1,x_2)$
4. exp	–	–	–	–	1	$-\overset{4}{C}_5 e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}$
4. pol	–	–	–	–	1	$-\overset{4}{C}_1 P^2/2-\overset{4}{C}_2 x_1 P_3$ $+\overset{4}{C}_3 x_1-\overset{4}{C}_4 P$
40.	$\overset{40}{F}_1(x_1)$	1	1	$\overset{40}{F}_1(x_1)$	1	$\overset{40}{F}_1(x_1)$
41.	$\overset{41}{F}_1(x_1)$	e^{x_2}	e^{x_2}	$\overset{41}{F}_1(x_1)$	1	$\overset{41}{F}_1(x_1)e^{x_2}$
42.	$e^{\frac{x_1^2}{2}}$	$\overset{42}{F}_2(x_2)$	$\overset{42}{F}_2(x_2)$	$e^{\frac{x_1^2}{2}}$	1	$e^{\frac{x_1^2}{2}}\overset{42}{F}_2(x_2)$
43.	–	–	–	–	1	$\overset{43}{F}_1(x_1)x_2-\int\overset{43}{F}_1(x_1)x_1dx_1$
44.	1	$\overset{44}{F}_2(x_2)$	$\overset{44}{F}_2(x_2)$	1	1	$\overset{44}{F}_2(x_2)$
51.	$\overset{51}{F}_1(x_1)$	e^{x_2}/x_3	e^{x_2}	$\overset{51}{F}_1(x_1)/x_3$	$1/x_3$	$\overset{51}{F}_1(x_1)e^{x_2}$
52.	$e^{\frac{x_1^2}{2}}$	$\overset{52}{F}_2(x_2)/x_3$	$\overset{52}{F}_2(x_2)$	$e^{\frac{x_1^2}{2}}/x_3$	$1/x_3$	$e^{\frac{x_1^2}{2}}\overset{52}{F}_2(x_2)$
53.	–	–	–	–	$1/x_3$	$\overset{53}{F}_1(x_1)x_2-\int\overset{53}{F}_1(x_1)x_1dx_1$
54.	1	$\int\overset{54}{F}_2(x_2)dx_2/x_3$	$\int\overset{54}{F}_2(x_2)dx_2$	$1/x_3$	$1/x_3$	$\int\overset{54}{F}_2(x_2)dx_2$
6• exp	$e^{(1-l)\frac{x_1^2}{2}}$	$-e^{-x_2}\overset{6l}{F}_3(x_3)$	$-e^{-x_2}$	$e^{(1-l)\frac{x_1^2}{2}}\overset{6l}{F}_3(x_3)$	$\overset{6l}{F}_3(x_3)$	$-e^{(1-l)\frac{x_1^2}{2}-x_2}$

6• pol	–	–	–	–	$1/x_3$	$-\overset{6l}{C}\left((1-l)\frac{x_1^2}{2}-x_2\right)^2/2$
7.	–	–	–	–	$\overset{7}{F}_3(x_3)$	$-\left(\frac{x_1^2}{2}-x_2\right)$

Megjegyezzük, hogy az argumentumok szerkezete miatt nem minden részmegoldás állítható elõ minden általános megoldásból.

Itt rá kell arra mutatni, hogy az összes részmegoldást, illetve azok összes részét sikerült elõállítani a három teljes megoldásból.

Ez azt jeleneti, hogy egyrészt a részmegoldások valóban részmegoldások, másrészt, hogy a részmegoldások is rendelkeznek az általános megoldást jellemzõ (70), vagy (71) összefüggéssel kifejezett tulajdonsággal, azaz belsõ szerkezettel. Ennek kapcsán csak arra utalunk, hogy végül is ugyanazt a differenciálegyenlet-rendszert oldottuk meg, azaz az „azonosságok” ebbõl adódnak.

5.6. Az f_i függvények alapján az s függvény elõállítása

Az általános megoldások esetén az s függvény elõállítása triviális. Ezért itt csak megadjuk az s függvényeket.

1. Típusú megoldás

$$\overset{1}{S} = x_3\,\overset{1}{F}_{23}(x_2, x_3)\cdot G_1(x_1)\,. \tag{5.75}$$

2. Típusú megoldás

$$\overset{2}{S} = x_3\,\overset{2}{F}_{13}(x_1, x_3)\cdot G_2(x_2)\,. \tag{5.76}$$

3. Típusú megoldás

$$\overset{3}{S} = x_3\,\overset{3}{F}_{13}(x_1, x_2)\cdot G_3(x_3)\,. \tag{5.77}$$

A (71) alatti megoldás

$$S = x_3 F(x_1, x_2, x_3)\,. \tag{5.78}$$

A megoldásokról mondott jellemzést az s függvények alátámasztják.

6. A MATEMATIKAI HÁTTÉRRÕL

A kapott eredményeket alapvetõen triviálisnak kell nevezni: a három teljes és a sok részleges megoldás semmiben sem különbözik, mint az (2.1-3) összefüggés. Másképpen megfogalmazva, általános elvként semmiféle megszorítás nem írható fel sem az s, sem az f_i függvényekre külön-külön, mindösszesen az a triviális tény, hogy s és az f_i függvények között álljanak fönn a (2.1-3) összefüggések.

Felmerül a kérdés, hogy vajon a kapott eredmény minek a következménye. Az triviális, hogy a (2.1-3) összefüggésbõl nyert (2.7-9) egyenletet a (2.1-3) összefüggés kielégíti (lásd az (5.72-74) összefüggéseket). Vajon ez magának a (2.1-3) összefüggés speciális alakjának a következménye, vagy esetleg általánosabb feltételek mellett is ugyanerre az eredményre jutunk?

Ebben a fejezetben megvizsgáljuk az (2.1-3) összefüggésnél általánosabb összefüggések esetét.

6.1. A feladat megfogalmazása

Tekintsük a

$$f_i = a_{ij}\frac{\partial s}{\partial x_j} \tag{6.1}$$

egyenletet, ahol $i = j = 1,2,3$. A továbbiakban az i-re és j-re vonatkozó megszorítást csak akkor írjuk ki, ha az itt megadottnál szûkebb értelemben kívánjuk alkalmazni.

Ebbõl kifejezzük az s parciális differenciálhányadosait:

$$\frac{\partial s}{\partial x_j} = [a_{ij}]^{-1}[f_i] = A_{ji} f_i\,. \tag{6.2}$$

Természetesen feltesszük, hogy az $[a_{ij}]$ együtthatómátrix invertálható.

A továbbiakban az $[A_{ij}]$ mátrix egyes sorait a $[A_{1j}]$, $[A_{2j}]$ és $[A_{3j}]$ szimbólummal jelöljük, sorvektorként kezeljük.

A (2) egyenlet integrálhatósági feltételei a következõk:

$$\frac{\partial}{\partial x_2}[A_{1j}][f_j] = \frac{\partial}{\partial x_1}[A_{2j}][f_j]\,, \tag{6.3a}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}[A_{2j}][f_j] = \frac{\partial}{\partial x_2}[A_{3j}][f_j]\,, \tag{6.3b}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}[A_{3j}][f_j]=\frac{\partial}{\partial x_3}[A_{1j}][f_j]\,. \tag{6.3c}$$

Amennyiben az $[A_{ij}]$, azaz a $[a_{ij}]$ tetszõleges, úgy a (3) egyenlet tartalmazza mindhárom f_i függvény mindhárom parciális deriváltját. A kilenc mennyiségbõl csak háromra nézve lehet integrálhatósági feltételt felírni. Pontosabban fogalmazva, kiválasztva egy függvényt – legyen f_1 –, annak három parciális differenciálhányadosa kifejezhetõ a (3) összefüggésekbõl.

$$\frac{\partial}{\partial x_2}A_{11}f_1+\frac{\partial}{\partial x_2}[A_{1k}][f_k]=\frac{\partial}{\partial x_1}A_{21}f_1+\frac{\partial}{\partial x_1}[A_{2k}][f_k]\,, \tag{6.4a}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}A_{21}f_1+\frac{\partial}{\partial x_3}[A_{2k}][f_k]=\frac{\partial}{\partial x_2}A_{31}f_1+\frac{\partial}{\partial x_2}[A_{3k}][f_k]\,, \tag{6.4b}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}A_{31}f_1+\frac{\partial}{\partial x_1}[A_{3k}][f_k]=\frac{\partial}{\partial x_3}A_{11}f_1+\frac{\partial}{\partial x_3}[A_{1k}][f_k]\,, \tag{6.4c}$$

ahol itt és a továbbiakban k = 2,3. A csökkentett méretû sor- és oszlopvektorokra a szokásos [.]-es jelölést alkalmazzuk, a méretet az index adja meg.

Amennyiben az A_{ij} mennyiségek az x_i változók tetszõleges függvényei volnának, úgy a (4) egyenleteket nem lehetne integrálhatósági feltételként használni, mivel

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_p}A_{qr}\right)f_r+A_{qr}\frac{\partial}{\partial x_p}f_r \tag{6.5}$$

típusú kifejezéseket kapnánk. (Itt mindhárom index az 1, 2 és 3 értéket veszi fel, p • q, és r szerint nincs összegzés.) Ebben az esetben a (4) egyenleteket az

$$f_1+F_1(x_1,x_2,x_3)\frac{\partial}{\partial x_1}f_1=G_1(x_1,x_2,x_3,\frac{\partial}{\partial x_j}f_2,\frac{\partial}{\partial x_j}f_3)\,, \tag{6.6a}$$

$$f_1+F_2(x_1,x_2,x_3)\frac{\partial}{\partial x_2}f_1=G_2(x_1,x_2,x_3,\frac{\partial}{\partial x_j}f_2,\frac{\partial}{\partial x_j}f_3)\,, \tag{6.6b}$$

$$f_1+F_3(x_1,x_2,x_3)\frac{\partial}{\partial x_3}f_1=G_3(x_1,x_2,x_3,\frac{\partial}{\partial x_j}f_2,\frac{\partial}{\partial x_j}f_3) \tag{6.6c}$$

alakba kellene átírni. Ez egy-egy közönséges differenciálegyenletként lenne értelmezhetõ, amelyek megoldásainak azonosnak kellene lenne, mivel ugyanazon f_1 függvényrõl van szó. A három különbözõ megoldást ugyanazon f_1 függvényre összevetve lehet most már az a $\frac{\partial}{\partial x_j}f_2$ és a $\frac{\partial}{\partial x_j}f_3$ mennyiségekre nézve összefüggést felírni. Ezt az utat mellõzzük. E helyett megvizsgáljuk azt az esetet, amikor az A_{ij} együtthatók konstansok.

6.2. Konstans együtthatók esete

Tehát tekintsük az A_{ij} együtthatókat konstansoknak! Rendezzük az (4) egyenletet az f_1 függvény parciális differenciálhányadosaira nézve! Az átrendezés közben megváltoztattuk a (4) egyenletek sorrendjét: az elsõ helyre a (4b), a másodikra a (4c) a harmadikra a (4a) került. Továbbá, az áttekinthetõség kedvéért, a parciális differenciálást a ˜$_j$ szimbólummal jelöljük.

$$\begin{bmatrix} & -A_{31} & A_{21} \\ A_{31} & & -A_{11} \\ -A_{21} & A_{11} & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \partial_1 f_1 \\ \partial_2 f_1 \\ \partial_3 f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_{3k}][\partial_2 f_k]-[A_{2k}][\partial_3 f_k] \\ [A_{1k}][\partial_3 f_k]-[A_{3k}][\partial_1 f_k] \\ [A_{2k}][\partial_1 f_k]-[A_{1k}][\partial_2 f_k] \end{bmatrix}. \qquad (6.7)$$

Az együtthatómátrix determinánsa nulla. Amennyiben a sorok lineárisan összefüggõk, úgy az egyik parciális differenciálhányados kifejezhetõ a másik kettõ segítségével.

Vegyük észre, hogy a (7) jobb oldala azonos szerkezettel bír, mint a bal oldala. Nevezetesen:

$$\begin{bmatrix} & -A_{31} & A_{21} \\ A_{31} & & -A_{11} \\ -A_{21} & A_{11} & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \partial_1 f_1 \\ \partial_2 f_1 \\ \partial_3 f_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & -A_{32} & A_{22} \\ A_{32} & & -A_{12} \\ -A_{22} & A_{12} & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \partial_1 f_2 \\ \partial_2 f_2 \\ \partial_3 f_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & -A_{33} & A_{23} \\ A_{33} & & -A_{13} \\ -A_{23} & A_{11} & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \partial_1 f_3 \\ \partial_2 f_3 \\ \partial_3 f_3 \end{bmatrix} = 0. \qquad (6.8)$$

Mivel mindhárom együtthatómátrix azonos szerkezettel bír, ezért azonos módon függnek össze: az elsõ sornak az A_{i1}-vel, a második sornak az A_{i2}-vel, végül a harmadik sornak az A_{i3}-vel vett szorzatát összeadjuk, akkor nullát kapunk az f_i függvény együtthatómátrixának.

Rendezzük az egyenletet pl. f_1 deriváltjaira. Ekkor *egy* olyan egyenletet kapunk, amelyben csak f_2 és f_3 deriváltjai szerepelnek, és a lineáris kombinációjuk nulla. Egyelõre, a részleteket mellõzve, egy

$$B_{12}\frac{\partial}{\partial x_1} f_2 + B_{22}\frac{\partial}{\partial x_2} f_2 + B_{32}\frac{\partial}{\partial x_3} f_2 + B_{13}\frac{\partial}{\partial x_1} f_3 + B_{23}\frac{\partial}{\partial x_2} f_3 + B_{33}\frac{\partial}{\partial x_3} f_3 = 0 \qquad (6.9)$$

típusú egyenletrõl van szó.

Két lehetõség van. Az egyik, hogy a függvények lényegiben különböznek egymástól, ekkor az együtthatóknak kell zérusnak lenni, azaz a (8) egyenlet három mátrixa csak egy-egy arányossági tényezõben térhet el egymástól. A második lehetõség, hogy az egyes f_i függvény parciális deriváltjaik azonosak, ezért a (9) egyenletben az egyes B_{ij} együtthatók összege kell, hogy zérussal legyen egyenlõ. Mivel a B_{ij} együtthatók függetlenségét tételezzük fel, azért alapvetõen a választás a következõ: két függvény két megegyezõ parciális deriváltja legyen azonos, a harmadik parciális derivált a másik függvény harmadik parciális deriváltjával egyezzen meg. Pl.

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} f_2 , \tag{6.10}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f_3 = \frac{\partial}{\partial x_2} f_3 , \tag{6.11}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} f_2 = \frac{\partial}{\partial x_3} f_3 . \tag{6.12}$$

Ha a megoldást összegalakban keressük, akkor az elsõ két egyenlet szerint f_2 és f_3 x_1-ben és x_2-ben lineárisak, míg a harmadik egyenlet szerint x_3-ban meg megegyeznek. Mivel (9)-cel analóg egyenlet írható fel az f_1 és f_2, valamint az f_1 és f_3 párosra, az derül ki, hogy a három f_i függvény egy függvényre megy vissza:

$$f_1 = f_2 = f_3 = (x_1 + x_2) g(x_3) . \tag{6.13}$$

Ha a megoldást szorzatalakban keressük, akkor annyi változás van, hogy az elsõ két egyenlet szerint f_2 és f_3 x_1-ben és x_2-ben exponenciális. A többi megjegyzés most is áll, tehát a három f_i függvény ez esetben is egy függvényre megy vissza:

$$f_1 = f_2 = f_3 = e^{x_1 + x_2} g(x_3) . \tag{6.14}$$

Ez két dolgot jelet: az egyik, hogy nincs három f_i függvény, hanem csak egy, és az két változójában meghatározott. Ekkor már maguknak az A_{ij} együtthatóknak a szerepe megszûnt. Ezt a megoldást nem tekintjük kellõen általánosnak. Mint az késõbb megmutatjuk, ha három f_i függvény helyett egy függvényt választunk, akkor összegalakban csak a változók lineáris kombinációja, szorzat alakban pedig csak az exponenciális függvény választható.

Megjegyezzük, hogy igaz, hogy a (9) egyenlet felírás esetleges volt, de bármely más deriváltra vonatkozó kombináció a másik két változóra nézve adja meg ugyanezt a feltételt, tehát végeredményben ugyanazt a tényt, hogy a három f_i függvény helyett csak egy választható.

Térjünk vissza az elsõ lehetõségre. Ez az, hogy az $[A_{ij}]$ együtthatómátrixból alkotott, a (8) egyenletben szereplõ aszimmetrikus mátrixok lineárisan összefüggõk. A részleteket mellõzve, egy lehetséges mátrix a következõ:

$$\begin{bmatrix} 1 & A_{21} & \dfrac{A_{33}}{A_{13}} \\ \dfrac{A_{13}A_{32}}{A_{33}} & \dfrac{A_{13}A_{21}A_{32}}{A_{33}} & A_{32} \\ A_{13} & A_{13}A_{21} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{matrix} (1) \\ \left(\dfrac{A_{33}}{A_{13}A_{32}}\right) \\ (A_{13}) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & A_{21} & \dfrac{A_{33}}{A_{13}} \\ 1 & A_{21} & \dfrac{A_{33}}{A_{13}} \\ 1 & A_{21} & \dfrac{A_{33}}{A_{13}} \end{bmatrix}, \qquad (6.15)$$

ahol a gömbölyû zárójelbe tett mennyiségekkel kell a jobb oldalon a mátrix vonatkozó sorait szorozni. Ez viszont azt jelenti, hogy a kiinduló (2) egyenletrendszerünkben csak egy függvény szerepel kétféle együtthatóval. (Ugyanoda jutottunk, mintha f_i-re tettünk volna feltevést!) Részletezve:

$$\frac{\partial s}{\partial x_1} = f \;, \qquad (6.16a)$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_2} = c_2 f \;, \qquad (6.16b)$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_3} = c_3 f \;. \qquad (6.16c)$$

Az integrálhatósági feltételek

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = c_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} \,, \qquad (6.17a)$$

$$c_2 \frac{\partial f}{\partial x_3} = c_3 \frac{\partial f}{\partial x_2} \,, \qquad (6.17b)$$

$$c_3 \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_3} \,. \qquad (6.17c)$$

A (17) egyenletrendszer megoldása a lineáris, illetve az exponenciális függvény; azaz

$$\overset{0}{C}_1 x_1 + \overset{0}{C}_2 x_2 + \overset{0}{C}_3 x_3 \,, \qquad (6.18)$$

illetve

$$e^{\overset{0}{C}_1 x_1 + \overset{0}{C}_2 x_2 + \overset{0}{C}_3 x_3} \,. \qquad (6.19)$$

Megmutatható, hogy mindkét függvényre az integrálhatósági feltételek

$$\overset{0}{C}_2 = c_2 \overset{0}{C}_1 \,, \qquad (6.20a)$$

$$c_2 \overset{0}{C}_3 = c_3 \overset{0}{C}_2 \,, \qquad (6.20b)$$

$$c_3 \overset{0}{C}_1 = \overset{0}{C}_3 \,. \tag{6.20c}$$

Mivel a három egyenlet lineárisan összefüggõ, ezért a 2. és 3. együtthatót kifejezzük az elsõvel

$$\overset{0}{C}_2 = c_2 \overset{0}{C}_1 \,, \tag{6.21a}$$

$$\overset{0}{C}_3 = c_3 \overset{0}{C}_1 \,. \tag{6.21b}$$

Az általánosság megsértése nélkül a $\overset{0}{C}_1$ -t választhatjuk egynek.

A két megoldás

$$f = x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \,, \tag{6.22}$$

$$f = e^{x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3} \,. \tag{6.23}$$

A két megoldáshoz meghatározzuk az s függvényt.

A polinomiális megoldáshoz tartózó s függvény

A (16) egyenlet alapján meghatározzuk az s függvényt.

$$s_1 = \frac{x_1^{\;2}}{2} + c_2 x_1 x_2 + c_3 x_1 x_3 \,, \tag{6.24a}$$

$$s_2 = c_2 x_1 x_2 + c_2^{\;2} \frac{x_2^{\;2}}{2} + c_2 c_3 x_2 x_3 \,, \tag{6.24b}$$

$$s_3 = c_3 x_1 x_3 + c_2 c_3 x_2 x_3 + c_3^{\;2} \frac{x_3^{\;2}}{2} \,, \tag{6.24c}$$

ahonnét

$$s_3 = \frac{x_1^{\;2}}{2} + c_2 x_1 x_2 + c_3 x_1 x_3 + c_2^{\;2} \frac{x_2^{\;2}}{2} + c_2 c_3 x_2 x_3 + c_3^{\;2} \frac{x_3^{\;2}}{2} \,. \tag{6.25}$$

Az exponenciális megoldáshoz tartózó s függvény

A (16) egyenlet alapján meghatározzuk az s függvényt. Mivel az i-edik parciális derivált esetében az f függvény szorzója megegyezik a kitevõben lévõ i-edik változó szorzójával, azért

$$s = e^{x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3} \,. \tag{6.26}$$

A megoldás és a megoldandó egyenlet struktúrájának az azonossága a konstans együtthatók esetén is fennáll.

Mivel az eredeti feladatban az együtthatók valójában együtthatófüggvények, és arra az esetre is sikerült az egyenletrendszert megoldani, ezért megvizsgáljuk azt a kérdést, hogy milyen feltételeknek kell fennállniuk az $[A_{ij}]$ együtthatómátrixra nézve, hogy a (2) egyenlet integrálható legyen. Ezt vizsgáljuk meg a következõ pontban.

6.3. Az integrálhatóság feltétele az együtthatókra nézve

A (7) egyenlet helyett most a

$$\begin{bmatrix} & -\partial_2 A_{31} & \partial_3 A_{21} \\ \partial_1 A_{31} & & -\partial_3 A_{11} \\ -\partial_1 A_{21} & \partial_2 A_{11} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_2[A_{3k}][f_k] - \partial_3[A_{2k}][f_k] \\ \partial_3[A_{1k}][f_k] - \partial_1[A_{3k}][f_k] \\ \partial_1[A_{2k}][f_k] - \partial_2[A_{1k}][f_k] \end{bmatrix} \tag{6.27}$$

egyenletet kell vizsgálni. (Az egyenletben a differenciáloperátor az Af kifejezés *egészére* hat.)

Ahhoz, hogy elkerüljük az f függvény megjelenését – lásd a (5) összefüggés kapcsán tett megjegyzéseket –, az szükséges, hogy az egyes A_{ij} együtthatók nem tetszõleges, hanem rögzített módon függjenek az x_i változóktól. A (27) bal oldalán kiírtak alapján, figyelembe véve, hogy a jobb oldal a bal oldallal analóg szerkezetbe írható, az A_{ij} együtthatók a következõ módon függhetnek az x_i változóktól (lásd a (8) összefüggést):

$$A_{1j} = A_{1j}(x_1)\,, \tag{6.28a}$$

$$A_{2j} = A_{2j}(x_2)\,, \tag{6.28b}$$

$$A_{3j} = A_{3j}(x_3)\,. \tag{6.28c}$$

Ez azt jelenti, hogy a (2) egyenlet az alábbi alakú

$$\frac{\partial s}{\partial x_j} = A_{ji}(x_j)\, f_i\,. \tag{6.29}$$

Az integrálhatósági feltételek lehetõvé teszik, hogy egyértelmûen fejezzük ki az egyik f_i függvény két parciális deriváltját a harmadikkal. Választjuk az f_1 függvényt, és az x_2, illetve az x_3 szerinti parciális deriváltját fejezzük ki. Ekkor az alábbi egyenleteket kapjuk:

$$A_{11}(x_1)\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = A_{21}(x_2)\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1}(A_{22}(x_2)\, f_2 + A_{23}(x_2)\, f_3) - \frac{\partial}{\partial x_2}[A_{12}(x_1)\, f_2 + A_{13}(x_1)\, f_3]\,, \tag{6.30a}$$

$$A_{11}(x_1)\frac{\partial f_1}{\partial x_3} = A_{31}(x_3)\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1}(A_{32}(x_3)\, f_2 + A_{33}(x_3)\, f_3) - \frac{\partial}{\partial x_3}[A_{12}(x_1)\, f_2 + A_{13}(x_1)\, f_3]\,. \tag{6.30b}$$

Integrálva (30)-at, a következõ két összefüggést nyerjük:

$$A_{11}(x_1)\,f_1 + A_{12}(x_1)\,f_2 + A_{13}(x_1)\,f_3 = \frac{\partial}{\partial x_1}\int (A_{21}(x_2)\,f_1 + A_{22}(x_2)\,f_2 + A_{23}(x_2)\,f_3)dx_2\,, \tag{6.31a}$$

$$A_{11}(x_1)\,f_1 + A_{12}(x_1)\,f_2 + A_{13}(x_1)\,f_3 = \frac{\partial}{\partial x_1}\int (A_{31}(x_3)\,f_1 + A_{32}(x_3)\,f_2 + A_{33}(x_3)\,f_3)dx_3\,. \tag{6.31b}$$

Ennek az integrálhatósági feltétele éppen (3c). Azaz visszakaptuk az eredeti egyenletrendszert. Ezen az úton az f_i függvényeket meghatározni nem lehet.

A továbblépéshez „bázist” váltunk. Ne az f_i függvényeket tekintsük adottnak, hanem a

$$F_j = A_{ji}\,f_i\,. \tag{6.32}$$

függvényeket. Ekkor a megoldandó egyenletrendszer

$$\frac{\partial s}{\partial x_j} = F_j\,. \tag{6.33}$$

Ez esetben a (33) integrálhatósági feltétele a következõ

$$\frac{\partial}{\partial x_2}F_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}F_2\,, \tag{6.34a}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}F_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}F_3\,, \tag{6.34b}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}F_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}F_1\,. \tag{6.34c}$$

Ennek a megoldását összeg és szorzatalakban keressük.

Az összegalak alapvetõen a változók lineáris kombinációjára vezet.

$$F_1 = \overset{0}{F}_1(x_1) + C_3x_2 + C_2x_3\,, \tag{6.35a}$$

$$F_2 = C_3x_1 + \overset{0}{F}_2(x_2) + C_1x_3\,, \tag{6.35b}$$

$$F_3 = C_2x_1 + C_1x_2 + \overset{0}{F}_3(x_3)\,. \tag{6.35c}$$

Ez persze azt jelenti, hogy az f_i függvények eggyel egyenlõek, és az A_{ij} együtthatókat határoztuk meg. Mint az a (35)-bõl leolvasható, az A_{ij} együtthatók a (28)-cal összhangban vannak.

Innét az s függvény

$$\overset{0}{s} = C_3x_1x_2 + C_2x_1x_3 + C_3x_2x_3 + \overset{0}{s}_1(x_1) + \overset{0}{s}_2(x_2) + \overset{0}{s}_3(x_3)\,. \tag{6.36}$$

A (34) megoldás szorzatalak esetében az F_i függvények három egyváltozós függvény szorzataként állnak elõ úgy, hogy az i-edik függvény az i-edik változó szerint differenciálva van. Képletben:

$$F_1 = \frac{d\,\overset{1}{F}_1(x_1)}{dx_1}\,\overset{1}{F}_2(x_2)\,\overset{1}{F}_3(x_3)\,, \tag{6.37a}$$

$$F_2 = \overset{1}{F}_1(x_1)\,\frac{d\,\overset{1}{F}_2(x_2)}{dx_2}\,\overset{1}{F}_3(x_3)\,, \tag{6.37b}$$

$$F_3 = \overset{1}{F}_1(x_1)\,\overset{1}{F}_2(x_2)\,\frac{d\,\overset{1}{F}_3(x_3)}{dx_3}\,. \tag{6.37c}$$

Az f_i függvények meghatározása az (32) invertálásával történik, emlékeztetünk arra, hogy $\mathbf{A}$ az $\mathbf{a}$ inverze:

$$[f_i] = [A_{ji}]^{-1}[F_j] = [a_{ij}][F_j]\,. \tag{6.38}$$

Végül az s függvény

$$\overset{1}{s} = \overset{1}{F}_1(x_1)\,\overset{1}{F}_2(x_2)\,\overset{1}{F}_3(x_3)\,. \tag{6.39}$$

A nyert eredménybõl világos, hogy az A_{ij} együtthatókra kirótt követelmény alapvetõen nem mozdította elõ a megoldást, hiszen végül is az s függvény meghatározásánál egy további feltétellel kellett élni. Ez viszont rámutat arra, hogy az A_{ij} együtthatófüggvények típusától függetlenül is meghatározható az s függvény. Ezt a következõ pontban mutatjuk meg.

6.4. Tetszõleges együtthatófüggvények esete

Tekintsük a

$$\frac{\partial s}{\partial x_j} = A_{ji}(x_1, x_2, x_2)\, f_i\,. \tag{6.40}$$

egyenleteket, ahol, mint az a (40)-bõl kitûnik, az A_{ij} együtthatók legyenek az x_i változók tetszõleges függvényei. Vezessük be a

$$F_j = A_{ji}\, f_i\,. \tag{6.41}$$

függvényeket. Ekkor a megoldandó egyenletrendszer

$$\frac{\partial s}{\partial x_j} = F_j\,. \tag{6.42}$$

Ez esetben a (42) integrálhatósági feltétele a szintén (34) (itt már nem játszik szerepet, hogy az A_{ij} együtthatók minek is a függvényei). Természetesen a megoldást összegalakban a (35), szorzat alakban a (37) adja meg. Összegalak esetén az f_i függvények eggyel egyenlõek, és a (35) a lehetséges A_{ij} együtthatókat értelmezi, szorzatalak esetén az F_i függvény felírása után az f_i függvényeket (38) alapján kell meghatározni. Az s függvényt a (36), illetve (39) adja meg. A képletek ismételt kiírásától eltekintünk.

6.5. Következtetések

A kapott eredmény fényében a következõk mondhatók.

A vizsgált elsõrendû, parciális differenciálegyenlet-rendszer megoldását vagy összeg, vagy szorzat alakjában állítottuk elõ. Az összeg alak esetén valójában három közönséges differenciálegyenlet-rendszerre esik szét, a csatolás csak a lineáris tagokon keresztül valósul meg. Szorzatalak esetén a helyzet analóg: három közönséges differenciálegyenlet-rendszerre esik szét rendszer, csak a megoldás nem lineáris kombináció, hanem szorzat alakú, az egyes F_i függvények x_i szerinti differenciálásban különböznek egymástól, bár az f_i függvények már függenek az eredeti egyenletrendszer együtthatóinak szerkezetétõl is. Ez a csatolás „szoros"-nak nevezhetõ.

Ezen belül a választott függvényszerkezetnek (összeg, vagy szorzat) megfelelõen az s függvény szerkezete megfelel (azaz vagy összeg, vagy szorzat). Ez az eredmény független attól, hogy hogyan választjuk meg az f_i függvényeket, hogy hogyan választjuk meg az A_{ij}, azaz az a_{ij} együtthatókat. (Annyi kikötést kell tenni, és hogy az $[a_{ij}]$ mátrix invertálható kell, hogy legyen.) A trivialitásnak nem az az oka, hogy az f_i függvények együtthatóit speciálisan választottuk meg, hanem az, hogy *az egyenletrendszer s elsõrendû parciális deriváltjaira rendezhetõ*.

Ezen eredmény fényében a tanulmányban a kitûzött feladat integrálásakor elért eredmények helyesek, hiszen azok szerkezete megegyezik az (37), (38), valamint (39) alatti összefüggések szerkezetével. Egyúttal igazolja azt a hozzáállást, hogy nem az $f_3 =$ • •(f_1,f_2) összefüggés lehetõségeit kell elsõdlegesen keresni, mivel a differenciálegyenlet-rendszer struktúrája meghatározza mind az f_i, mind az s függvény szerkezetét. Csak ezen szerkezet ismeretében lehet a $f_3 =$ • •(f_1,f_2) típusú kapcsolatokat vizsgálni.

7. A KITÛZÖTT FELADATRÓL

7.1. Megjegyzés a ciklikusságról

A pályázati kiírásban a feladat pontos megfogalmazása így hangzik.

„Adjon általános feltételeket *s*-re, amelyek mellett létezik $\Phi_3 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ úgy, hogy $f_3 = \Phi_3 \circ (f_1, f_2)$, vagy hasonló összefüggés áll fenn az indexek *ciklikus permutációja* esetén.”

A feladat alapösszefüggései:

$$f_1 = \frac{\partial s}{\partial x_3}, \tag{7.1}$$

$$f_2 = \frac{1}{x_3}\left(\frac{\partial s}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial s}{\partial x_2}\right), \tag{7.2}$$

$$f_3 = \frac{1}{x_3}\frac{\partial s}{\partial x_2}. \tag{7.3}$$

A feladat nem rendelkezik ciklikus permutációs tulajdonsággal. Felírunk egy ciklikus összefüggést, amely talán a legszûkebb és talán a legközelebb áll a kitûzött feladathoz. (A ciklikus összefüggések közé tartoznak a fõátlóbeli elemek, amelyeket vagy szorzunk a vonatkozó változóval vagy nem, a szorzótényezõk lehetnek más függvények is, stb.)

$$F_1 = x_3 f_3 = \qquad \frac{\partial s}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial s}{\partial x_3}, \tag{7.4}$$

$$F_2 = f_1 = x_3 \frac{\partial s}{\partial x_1} \qquad + \frac{\partial s}{\partial x_3}, \tag{7.5}$$

$$F_3 = x_3 f_2 = \frac{\partial s}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial s}{\partial x_2} \qquad . \tag{7.6}$$

Ezek alapján látható, hogy a kiírt feladat valóban nem rendelkezik ciklikus tulajdonságokkal. Ebbõl persze nem következik, hogy ne lehetne ciklikus megoldásokat találni, de, ismerve az (1-3) egyenlet általános integráljait, kijelenthetõ, hogy nem valószínû ciklikus megoldás.

Azt is meg kell jegyezni, hogy a (4-6) összefüggés esetén az *s* függvény parciális deriváltja ugyan ciklikus (szimmetrikus) formában, de kissé összetettebb alakban nyerhetõk:

$$\frac{\partial s}{\partial x_1}=\frac{F_2-x_3F_3+x_3x_1F_1}{1-x_1x_2x_3}\,, \tag{7.7}$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_2}=\frac{F_3-x_1F_1+x_1x_2F_2}{1-x_1x_2x_3}\,, \tag{7.8}$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_3}=\frac{F_1-x_2F_2+x_2x_3F_3}{1-x_1x_2x_3}\,. \tag{7.9}$$

Az integrálhatóság feltétel formálisan felírható

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x_1\partial x_2} \qquad \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{F_2-x_3F_3+x_3x_1F_1}{1-x_1x_2x_3}=\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{F_3-x_1F_1+x_1x_2F_2}{1-x_1x_2x_3}\,, \tag{7.10}$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x_2\partial x_3} \qquad \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{F_3-x_1F_1+x_1x_2F_2}{1-x_1x_2x_3}=\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{F_1-x_2F_2+x_2x_3F_3}{1-x_1x_2x_3}\,, \tag{7.11}$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x_3\partial x_1} \qquad \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{F_1-x_2F_2+x_2x_3F_3}{1-x_1x_2x_3}=\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{F_2-x_3F_3+x_3x_1F_1}{1-x_1x_2x_3}\,, \tag{7.12}$$

de már ennek kifejtésre sem vállalkozunk, a megoldásáról nem is beszélve. (Megjegyezzük, hogy a matematikai háttér ismeretében nem biztos, hogy ez a követendõ út, pontosabban biztos, hogy nem ez a követendõ út.)

Végül utalunk, arra, hogy a kitûzött feladat rejtetten rendelkezik egyfajta ciklikus szimmetriával.

Tekintsük a (2.7-9) egyenleteket.

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(x_3 f_2 - x_1x_3 f_3)=\frac{\partial}{\partial x_1}x_3 f_3\,, \tag{7.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}x_3 f_3=\frac{\partial}{\partial x_2}f_1\,, \tag{7.14}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}f_1=\frac{\partial}{\partial x_3}(x_3 f_2 - x_1x_3 f_3)\,. \tag{7.15}$$

Vezessük be a következõ jelöléseket!

$$\bar{f}_1 = x_3 f_2 - x_1x_3 f_3\,, \tag{7.16a}$$

$$\bar{f}_2 = x_3 f_3\,, \tag{7.16b}$$

$$\bar{f}_3 = f_1\,. \tag{7.16c}$$

Ekkor a (2.7-9) egyenlet ciklikus szimmetriával rendelkezõ formát ölt.

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\bar{f}_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}\bar{f}_2 , \tag{7.17}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\bar{f}_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}\bar{f}_3 , \tag{7.18}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\bar{f}_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}\bar{f}_1 . \tag{7.19}$$

Megjegyezzük, hogy ennek az egyenletrendszernek a megoldása:

$$\bar{f}_1 = \frac{d\bar{F}_1(x_1)}{dx_1}\bar{F}_2(x_2)\bar{F}_3(x_3) , \tag{7.20a}$$

$$\bar{f}_2 = \bar{F}_1(x_1)\frac{d\bar{F}_2(x_2)}{dx_2}\bar{F}_3(x_3) , \tag{7.20b}$$

$$\bar{f}_3 = \bar{F}_1(x_1)\bar{F}_2(x_2)\frac{d\bar{F}_3(x_3)}{dx_3} . \tag{7.20c}$$

A (16) inverzébõl meghatározható f_i-re az általános megoldás. Ez természetesen analóg a korábban megtalált általános megoldásokkal, illetve a (6.37) megoldással.

7.2. A kitûzött feladatról, azaz a $f_3 = \Phi_3 \circ (f_1, f_2)$ összefüggésrõl

A pályázati kiírásban a feladat pontos megfogalmazása így hangzik.

„Adjon *általános feltételeket s-re,* amelyek mellett létezik $\Phi_3 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ úgy, hogy $f_3 = \Phi_3 \circ (f_1, f_2)$, vagy hasonló összefüggés áll fenn az indexek ciklikus permutációja esetén.”

A továbbiakban a mérnöki gyakorlatban megszokottabb

$$f_3 = \Phi_3(f_1, f_2) \tag{7.21}$$

jelölést alkalmazva felírjuk az (2.7-9) összefüggést.

$$\frac{\partial x_3 f_2}{\partial x_2} - x_1\frac{\partial x_3\Phi_3}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_2} - x_1\frac{\partial x_3\Phi_3}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\partial x_3\Phi_3}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_3} + \frac{\partial x_3\Phi_3}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_3} , \tag{7.22}$$

$$\Phi_3 + \frac{\partial x_3\Phi_3}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_3} + \frac{\partial x_3\Phi_3}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2} , \tag{7.23}$$

$$\frac{\partial x_3 f_2}{\partial x_3} - x_1\Phi_3 - x_1\frac{\partial x_3\Phi_3}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - x_1\frac{\partial x_3\Phi_3}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} . \tag{7.24}$$

Formálisan három ismeretlenhez – Φ_3, f_1, f_2 – három egyenletünk van. Ahhoz, hogy valami értelmeset lehessen kihozni belõle, be kell vezetni egy $f_3 = \Phi_3(f_1, f_2)$ „típusú” jelölést, amikor is az eredeti egyenlettel fogunk tovább dolgozni. Azt pedig végig vizsgáltuk.

Tekintsük a (2.3) összefüggést, és helyettesítsük bele a (21)-et:

$$\frac{1}{x_3}\frac{\partial s}{\partial x_2} = \Phi_3\left(\frac{\partial s}{\partial x_3}, \frac{\partial s}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial s}{\partial x_2}\right). \tag{7.25}$$

Ez egy egyenlet két ismeretlennel, önmagában megoldhatatlan.

Ugyanakkor látható, ha a (21)-ben adott az •$_3$ összefüggés, akkor (25) egy parciális differenciálegyenlet az *s* függvényre nézve, azaz elméletileg van lehetõség arra, hogy megoldjuk.

Az általános $f_3 = \Phi_3(f_1, f_2)$ függvény helyett válasszunk valamely konkrét, lehetõleg egyszerû kapcsolatot.

Tekintsük a lineáris kombinációt!

$$f_3 = a_1 f_1 + a_2 f_2, \tag{7.26}$$

Behelyettesítve (22-24)-be.

$$\frac{\partial x_3 f_2}{\partial x_2} - x_1x_3a_1\frac{\partial f_1}{\partial x_2} - x_1x_3a_2\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = a_1x_3\frac{\partial f_1}{\partial x_3} + a_2x_3\frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \tag{7.27}$$

$$a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_1x_3\frac{\partial f_1}{\partial x_3} + a_2x_3\frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \tag{7.28}$$

$$\frac{\partial x_3 f_2}{\partial x_3} - x_1(a_1 f_1 + a_2 f_2) - x_1x_3a_1\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - x_1x_3a_2\frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}. \tag{7.29}$$

Valamivel egyszerûbb és elegánsabb, mint a (22-24), de megoldása nem tûnik egyszerû(bb)nek.

Az (25) alapján elindulhatunk egy másik úton. A (2.3) összefüggésbe helyettesítsük be (26)-ot, majd használjuk (2.1,2) összefüggéseket.

$$\frac{1}{x_3}\frac{\partial s}{\partial x_2} = f_3 = a_1 f_1 + a_2 f_2 = a_1\frac{\partial s}{\partial x_3} + a_2\frac{1}{x_3}\frac{\partial s}{\partial x_1} + a_2\frac{x_1}{x_3}\frac{\partial s}{\partial x_2}. \tag{7.30}$$

Ekkor *s*-re nézve kaptunk egy parciális differenciálegyenletet.

$$a_1\frac{\partial s}{\partial x_3} + a_2\frac{1}{x_3}\frac{\partial s}{\partial x_1} + \frac{a_2x_1 - 1}{x_3}\frac{\partial s}{\partial x_2} = 0. \tag{7.31}$$

Az x_3 változóban *s*-nek olyannak kell lennie, hogy mind a differenciálás, mind az osztás ugyanarra a függvényre vezessen. Ez a lineáris függvény. Következésképpen:

$$s = \overset{3}{s}(x_1, x_2)x_3 \,. \tag{7.32}$$

Ekkor (31) alakja:

$$a_1 \overset{3}{s}(x_1, x_2) + a_2 \frac{\partial \overset{3}{s}(x_1, x_2)}{\partial x_1} + (a_2 x_1 - 1)\frac{\partial \overset{3}{s}(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0 \,. \tag{7.33}$$

Mivel f_3-at fejeztük ki, mint a másik kettõ összegét, azért s x_2-szerinti deriváltja nem lehet nulla. Ekkor az x_2 változóban s-nek olyannak kell lennie, hogy a differenciálás után a függvény ne változzon meg. Ez az exponenciális függvény. Következésképpen:

$$\frac{\partial \overset{3}{s}(x_1, x_2)}{\partial x_2} + \overset{3}{s}(x_1, x_2) = 0 \,. \tag{7.34}$$

$$s = \overset{1}{s}(x_1)e^{-x_2}x_3 \,. \tag{7.35}$$

Azaz

$$a_1 \overset{1}{s}(x_1) + a_2 \frac{\partial \overset{1}{s}(x_1)}{\partial x_1} - (a_2 x_1 - 1)\overset{1}{s}(x_1) = 0 \,. \tag{7.36}$$

Átrendezve

$$\frac{\partial \overset{1}{s}(x_1)}{\partial x_1} = \frac{a_2 x_1 - 1 - a_1}{a_2}\overset{1}{s}(x_1) \,. \tag{7.37}$$

Integrálva

$$\overset{1}{s}(x_1) = e^{\frac{x_1^2}{2} - \frac{a_1+1}{a_2}x_1} \,. \tag{7.38}$$

Az s függvény végsõ alakja

$$s(x_1, x_2, x_3) = e^{\frac{x_1^2}{2} - \frac{a_1+1}{a_2}x_1 - x_2} x_3 \,. \tag{7.39}$$

Meghatározzuk az f_i mennyiségeket.

$$f_1 = \frac{\partial}{\partial x_3} e^{\frac{x_1^2}{2} - \frac{a_1+1}{a_2}x_1 - x_2} x_3 = e^{\frac{x_1^2}{2} - \frac{a_1+1}{a_2}x_1 - x_2} \,, \tag{7.40a}$$

$$f_2 = \frac{1}{x_3}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} e^{\frac{x_1^2}{2} - \frac{a_1+1}{a_2}x_1 - x_2} x_3 + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} e^{\frac{x_1^2}{2} - \frac{a_1+1}{a_2}x_1 - x_2} x_3 \right) = e^{\frac{x_1^2}{2} - \frac{a_1+1}{a_2}x_1 - x_2}\left(x_1 - \frac{a_1+1}{a_2} - x_1 \right), \tag{7.40b}$$

$$f_3 = \frac{1}{x_3}\frac{\partial}{\partial x_2} e^{\frac{x_1^2}{2} - \frac{a_1+1}{a_2}x_1 - x_2} x_3 = -e^{\frac{x_1^2}{2} - \frac{a_1+1}{a_2}x_1 - x_2} . \tag{7.40c}$$

Ellenõrzés

$$a_1 + a_2\left(-\frac{a_1+1}{a_2} \right) = -1, \tag{7.41}$$

ami teljesül.

Matematikai szempontból találtunk az

$$f_3 = a_1 f_1 + a_2 f_2 \tag{7.42}$$

feltétel mellett egy *s* függvényt, ez a

$$s(x_1, x_2, x_3) = e^{\frac{x_1^2}{2} - \frac{a_1+1}{a_2}x_1 - x_2} x_3 . \tag{7.43}$$

(Az, hogy ennek mi a mechanikai tartalma, az más kérdés.)

A további vizsgálat elvi nehézségbe ütközik. Az a kérdés, hogy a (26) feltétel helyett mit vegyünk. Három típus mutatunk be, természetesen ez csak a saját „sorozataik” elsõ elemei

$$f_3 = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) f_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) f_2 , \tag{7.44}$$

$$f_3 = a_{11} f_1^2 + 2a_{12} f_1 f_2 + a_{22} f_2^2 , \tag{7.45}$$

$$f_3 = \left(a_{11}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + a_{12}\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + a_{13}\frac{\partial f_1}{\partial x_3} \right) + \left(a_{21}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + a_{22}\frac{\partial f_2}{\partial x_2} + a_{23}\frac{\partial f_2}{\partial x_3} \right). \tag{7.46}$$

Abból, hogy a (42) feltétel (43)-re vezetett, nem lehet levonni, azt a következtetést, hogy a (44), (45), vagy (46), vagy annál összetettebb feltétel mellett a (31)-gyel analóg egyenletet ne lehetne megoldani, sem azt, hogy a megoldása egyszerûbb, vagy összetettebb. De úgy tûnik, hogy nem lesz egyszerûbb. Talán azt az esetet kivéve, amikor (44) típusban úgy határozzuk meg az a_{ij} (i =1,2, j = 1,2,3) együtthatókat, hogy a differenciálegyenletben csak néhány tag maradjon meg. Viszont a fenti levezetés felveti azt a kérdést, hogy vajon nincs-e valamilyen elvárt jellege az f_i függvényeknek. Amennyiben van ilyen, úgy, inkább arról az oldalról kellene megközelíteni kérdést, semmint a fentebb ismertetett eljárással függvények sokaságát kipróbálni.

A felvetett kérdés általános vizsgálatához az (5.71) összefüggésekbõl célszerû kiindulni. Mivel az f_i függvények között az (5.71) összefüggéseknek fenn kell állniuk, ez azt jelenti, hogy ha van más összefüggés is az f_i függvények között, akkor azt a

$$\Psi\left(\frac{\partial x_3 \mathrm{F}(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3}, \frac{\partial \mathrm{F}(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial \mathrm{F}(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_2}, \frac{\partial \mathrm{F}(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_2}\right) = 0 \qquad (7.47)$$

alakba kell írni. Ez az a F függvényre nézve egy differenciálegyenlet. Errõl a differenciálegyenletrõl semmit sem lehet mondani. Sem az, hogy integrálható, azaz, hogy F meghatározható, sem az, hogy nem integrálható, azaz, hogy F nem határozható meg (46) *alapján nem eldönthetõ kérdés*. Magyarán kérdés sincs. Ennek oka egyszerûen az, hogy a Ψ mibenléte sem világos: vajon függvény, funkcionál, vagy operátor, ezen belül algebrai, transzcendens függvény, illetve differenciál-, integrál-, vagy integro-differenciál-operátor.

Más szavakkal: a tanulmány elején messze elkerült *ad hoc* módszer lép elõtérbe, két változatban is, amikor valamilyen más fizikai, és/vagy matematikai meggondolásból egy *s*, vagy F függvény, illetve Ψ „operátor" választható, akkor ezeknek a további szûkítése már megtehetõ. Ami a tanulmányban levezetett összefüggéseket illeti, talán a részleges megoldások érdeklõdésre tarthatnak számot, ha az egyes f_i függvényekre vonatkozó korlátozás már más megközelítésbõl ismert.

A kitûzött feladatra a válasz az, hogy

– *az f_i függvények között fenn kell állniuk egy (5.71) típusú összefüggésnek,*
– *ehhez a (5.78) alatti s függvény tartozik,*
– *ennek a matematikai háttere az, hogy az f_i függvényeket egy s függvény elsõrendû parciális differenciáljainak „lineáris függvénykombinációjaként" állítottuk elõ,*
– *az f_i függvények közötti bárminemû további kapcsolatot az f_i függvényekre megadott összefüggésekbõl levezetni nem lehet,*
– *az f_i függvények közötti bárminemû további kapcsolat megadása esetén az s függvénynek ehhez a kapcsolathoz tartózó „egyedi" tulajdonságai meghatározhatók.*

7.3. A kontinuummechanikai háttérrõl

A kitûzött feladat kontinuummechanikai hátterének a következõt tekinthetnõk.

A feszültség alakváltozás összefüggést kétfelé megközelítés alapján kétféle alakban állíthatjuk elõ. Egyrészt a feszültségi és az alakváltozási tenzor legáltalánosabb kapcsolatát egy negyedrendû tenzorként foghatjuk fel. Ez esetben a negyedrendû tenzonak 81 eleme van. Ha a másodrendû tenzorok szimmetrikusak, akkor a 81 elem 36-ra redukálódik. Teljes izotrópia esetén a független együtthatók száma kettõre csökken. Másrészt a feszültségi és az alakváltozási tenzor kapcsolatát sorfejtést alkalmazva, akkor – figyelembe véve a

Cayley–Hamilton-tételt – a feszültségi tenzor az alakváltozási tenzor nulladik, elsõ és második hatványainak összegeként áll elõ úgy, hogy az együtthatók már csak az alakváltozási tenzor fõinvariánsainak a függvényei. Ekkor a független együtthatók száma – a három összetevõnek megfelelõen – három.

Megjegyezzük, hogy már ez a megfogalmazás sem kellõen körültekintõ. Ugyanis a Cayley–Hamilton-tétel azt mondja ki, hogy minden (négyzetes) mátrix (némi ügyeskedéssel – tenzor) kielégíti a saját karakterisztikus egyenletét. Ennek az a következménye, hogy az n-edrendû (négyzetes) mátrixnak az n rangjánál magasabb hatványa kifejezhetõ a 0., 1. … (n-1)-dik hatványával. Ennek során az egyes i-edik (i = 0,1,2 ..n-1) hatvány együtthatója a fõinvariánsok függvénye Azaz, ha sorba fejtünk egy mátrixfüggvényt egy mátrix szerint, akkor nem szükséges végtelen számú tagig elmenni a sorban, elegendõ az elsõ n tagot megtartani. Viszont ez esetben már az egyes i-edik (i = 0,1,2 ..n-1) hatvány együtthatója már nem (csak) a fõinvariánsok függvénye, hanem attól is függ, hogy milyen függvényt közelítettünk. Azaz általános esetben nincs jelentõsége, hogy az együtthatók hogyan is függnek a mátrix fõinvariánsaitól. Ezt elfedi a sorfejtés.

Visszatérve a kitûzött feladat kontinuummechanikai hátterére, a kérdés az az, hogy most három, vagy két paraméterrel lehet a legáltalánosabban – izotrop anyagtulajdonságot feltételezve – a feszültségi és az alakváltozási tenzorok kapcsolatát jellemezni.

A válasz az, hogy mivel a két feltevés független egymástól, a kétféle feltevésnek megfelelõen kettõ, vagy három paraméter szükséges.

A bizonyítást mellõzzük, de rámutatunk a bizonyítás menetére.

– izotrop anyagot feltételezve az elsõ változatban a potenciálfüggvény a (feszültség) tenzor fõinvariánsainak kvadratikus alakjaitól függ; ebbõl kettõ független található, ($\mathrm{I}(\mathbf{A})^2$, $2\,\mathrm{II}(\mathbf{A})$)
– a tenzor négyzetének a fõinvariánsai egyértelmûen meghatározhatók a tenzor fõinvariánsaival, ($\mathrm{I}(\mathbf{A}^2) = \mathrm{I}(\mathbf{A})^2 - 2\,\mathrm{II}(\mathbf{A})$, $\mathrm{II}(\mathbf{A}^2) = \mathrm{II}(\mathbf{A})^2 - 2\,\mathrm{III}(\mathbf{A})\cdot\mathrm{I}(\mathbf{A})$, $\mathrm{III}(\mathbf{A}^2) =$ $= \mathrm{III}(\mathbf{A})^2$),
– izotrop anyagot feltételezve a második változatban a potenciálfüggvény a (feszültség)tenzor és négyzete fõinvariánsainak kvadratikus alakjaitól függ; a négyzetes alak miatt megjelenik egy harmadik független kifejezés is, lásd a $\mathrm{II}(\mathbf{A}^2)$ kifejezését.

Rá kell mutatni arra, hogy a kitûzött feladat két matematikai elv találkozásából született: az egyik a feszültség-alakváltozás összefüggésének matematikailag lehetséges legáltalánosabb kifejezése, mint két másodrendû tenzor közötti kapcsolat a Cayley–Hamilton-tétel fényében. A másik a feszültségtenzor kifejezése az entrópia (szabad energia) deriváltjai segítségével. Mindkettõ matematikai konstrukció. Nem látszik, hogy hogyan kapcsolódik a fizikai jelenséghez, pontosabban az alakváltozáshoz és a feszültséghez. A tanulmányban elvégezett számítások szerint ez irányból a feszültség-alakváltozás kapcsolatra nem fog fény derülni.

8. ÖSSZEFOGLALÁS

Jelen tanulmányban az ETTE 1. sz. feladatával foglalkoztunk. Maga a feladat az egyensúlyi entrópia olyan alakjának meghatározása, amely lehetõvé teszi, hogy a feszültségtenzort az alakváltozási tenzornak nem három, hanem két fõinvariánsával parametrizálhassuk. A tanulmányban ezt a feladatot felváltottuk az alakváltozási tenzor fõinvariánsaival parametrizált f_i (i = 1,2,3) függvényekre vonatkozó, mint az entrópia egyértelmû meghatározásának integrálhatósági feltételeiként elõállított, parciális differenciálegyenletek integrálásával.

Az így értelmezett feladat megoldásához az integráláson kívül a függvényegyenletekre vonatkozó eljárásokat is fel kellett használni. Ennek a keretén belül a figyelembe vett függvények körét szûkítettük: csak összeg és szorzat alakban kerestük a megoldást.

A tanulmányban kitûzött parciális differenciálegyenlet-rendszer megoldását több, különféle szempont szerint állítottuk elõ. Ennek során az alábbi eredményeket értünk el.

Meghatároztuk a vizsgált differenciálegyenlet-rendszer szabad integrálási függvényeit.

Értelmeztük a részmegoldások fogalmát, mint a vizsgált differenciálegyenlet-rendszer olyan megoldását, amelyben

– vagy nem három független változó szerepel, hanem csak kettõ (vagy egy),
– vagy nem három ismeretlen függvény szerepel, hanem csak kettõ (vagy egy),
– vagy ugyan szerepel mindhárom függvény, de a három függvény két csoportra esik szét.

A részmegoldásokhoz meghatároztuk a vizsgált differenciálegyenlet-rendszer általános megoldásait.

Megkerestük a vizsgált differenciálegyenlet-rendszer megoldásait egy- és kétargumentumú függvények összegeként értelmezett egyedi bázisválasztással. Külön vizsgáltuk azokat az eseteket, amikor a bázisfüggvények x_3-mal osztva vannak.

Meghatároztuk a vizsgált differenciálegyenlet-rendszer általános megoldásait, mint két- és egyargumentumú függvények szorzatait.

A fenti három feltétel mellett teljes megoldást adtunk. A megoldásokat a lehetõ legáltalánosabb formában adtuk meg. Ugyanakkor az integrálás során meghatároztunk néhány konkrét algebrai függvényt is, mint partikuláris megoldást.

Egy példán megmutattuk, hogy az egyenletrendszer egy részének létezik megoldása a hatványfüggvények körében (is).

A nyert megoldásokat megvizsgálva megállapítható, hogy azok között nincs olyan szerkezetû, amelyben egy f_i függvény kifejezhetõ lenne két másik segítségével, ellenben a legáltalánosabb megoldások szerkezete azonos: létezik egy kétváltozós és egy egyváltozós függvények szorzataként értelmezett függvény, amelynek a különbözõ parciális differenciálkifejezéseik segítségével mindhárom f_i függvény egyértelmûen meghatározható. A kétargumentumos megoldások alapvetõen csak két f_i függvény meghatározását teszik lehetõvé, bár van olyan is, amely mindhárom f_i (i = 1,2,3) függvényt meghatározza. Az egyargumentumos megoldások alapvetõen partikuláris megoldások.

Megvizsgáltuk a különbözõképpen kapott megoldásokat. Megmutattuk, hogy az általános megoldásból minden részmegoldás és egyedi megoldás megkapható. Rámutattunk a különbözõ megoldások közötti kapcsolatokra is. Ki kell hangsúlyozni, hogy az x_3-mal való szorzás, illetve, hogy csak az f_1 és f_3 között van összefüggés, néhány megoldás esetében két változat létezését teszi lehetõvé.

Külön foglalkoztunk azzal esettel, amikor egy egyenlet önmagában a benne szereplõ egyik függvényre nézve differenciálegyenletnek tekinthetõ és megoldható. Ez esetben ugyanis nem csak, hogy az egyik függvény kifejezhetõ a másik függvény parciális differenciálhányadosai segítségével, hanem kvadratúrában is felírható az összefüggés. Ez az eljárás lehetõvé teszi az általános megoldás mellett partikuláris megoldások elõállítását is. Ennek kapcsán mutattuk meg, hogy a megoldás elõállítható integrális, vagy differenciális formában is, továbbá ez lehetõvé tette néhány integráltranszformáció felírását is.

A tanulmányban az összes elõállított f_i (i = 1,2,3) függvényekhez meghatároztuk az egyensúlyi entrópiát. Ennek során beláttuk, hogy a legáltalánosabb megoldások esetén az egyensúlyi entrópia kifejezhetõ egy háromváltozós függvény segítségével. Ugyanakkor ez a függvény közvetlenül nem azonos egyik f_i (i = 1,2,3) függvénnyel sem, hiszen ennek a függvénynek a különbözõ parciális differenciálkifejezései határozzák meg az f_i (i = 1,2,3) függvényeket.

A nyert megoldások szerkezete azonos; sõt megegyezik az eredeti feladat szerkezetével. Azaz formailag új információt a megoldás nem tartalmaz. Ezért megvizsgáltuk általánosságban egy *s* függvény három parciális differenciáljára vonatkozó egyenletrendszert. Ennek során az egyes parciális differenciálhányadosokat a három f_i függvény tetszõleges lineáris kombinációjaként írtuk fel, és oldottuk meg a feladatot. A megoldás struktúrája megegyezett a kiindulási parciális differenciálegyenlet-rendszer struktúrájával. Ezt követõen meghatároztuk azon függvényegyütthatók körét, amelyekre az f_i függvényekre vonatkoztatott integrálhatósági feltételek felírhatók, és megoldottuk a feladatot, és analóg eredményt kaptunk. Végezetül megvizsgáltuk azt az esetet, amikor a három f_i függvény tetszõleges lineáris kombinációjában szereplõ együtthatók az x_i változók tetszõleges függvényei. Az eddig követett úttól eltérõ módszert alkalmazva meghatározható mind a három f_i függvény, mind az *s* függvény. Ez esetben is az f_i függvény szerkezete megegyezett a kiindulási parciális differenciálegyenlet-rendszer struktúrájával. Következésképpen megállapítható, hogy az ETTE 1. sz. kitûzött feladatának a tanulmányban adott megoldása elméletileg helytálló.

A matematikai háttér tanulmányozása során megállapítottuk, hogy az f_i függvények, és az *s* függvény szerkezetének alapstruktúráját az elsõrendû parciális differenciálok és csak azok jelenléte határozza meg. Sem az, hogy minden parciális derivált jelen van, sem pedig az, hogy az együtthatók konstansok vagy hogy azok az x_1, x_2, x_3 változók bármilyen függvényei, erre az alapstruktúrára nincsenek hatással. Erre az alapstruktúrára ráépül egy másodlagos szerkezet, ami viszont pontosan megegyezik az *s* parciális deriváltjait meghatározó függvények, illetve azok kombinációjának szerkezetével. Ezt a tényt is alapvetõen az határozza meg, hogy a vizsgált differenciálegyenlet-rendszerben csak az elsõrendû parciális differenciáloknak csak elsõ hatványai szerepelnek. (Mondhatnók, hogy lineáris kombinációi, de hozzá kellene tenni, hogy az együtthatóknak a független változóktól való függését nem zárjuk ki).

Megvizsgáltuk a kiírásban szereplõ, és a megoldás permutációs tulajdonságra vonatkozó elvárást. Megmutattuk, hogy a kitûzött feladat alapvetõen nem rendelkezik ciklikus szimmetriával, csak jelentõs átalakítás után. Ezért a ciklikus megoldásra vonatkozó elvárást megalapozatlannak tartjuk.

A tanulmányban feltárt matematikai háttér ismeretében a ciklikusságnak nincs szerepe sem az f_i függvények, sem az *s* függvény szerkezetében. (A matematikai háttér ismertében ez nem is meglepõ.)

Megvizsgáltuk a kiírásban szereplõ feladatot is. Megmutattuk, hogy teljes áltanosságban nem sok esély van a kapott differenciálegyenlet megoldására, ha abból indulunk ki, hogy az *s* függvényre nézve az integrálhatósági feltételeknek fenn kell állniuk. Ettõl eltérõ utat is megvizsgáltunk: nevezetesen a feltételezett kapcsolatot felhasználva közvetlenül az *s* függvényre írtunk fel differenciálegyenletet. Ez az egyenlet teljes általánosságban megoldhatatlannak tûnik: egy egyenlet két ismeretlent tartalmaz.

Egy speciális esetben – $f_3 = a_1 f_1 + a_2 f_2$ – meghatároztuk mind a három f_i függvényt, és az *s* függvényt értékét összeg- és szorzatfüggvények esetében. Rámutattunk azokra a lehetséges kapcsolatokra, amelyek elvben az f_1, az f_2 és az f_3 között fennállhatnak.

A kitûzött feladatra a válasz az, hogy

– az f_i függvények között fenn kell állniuk egy (5.71) típusú összefüggésnek,

– ehhez a (5.78) alatti *s* függvény tartozik,

– ennek a matematikai háttere az, hogy az f_i függvényeket egy *s* függvény elsõrendû parciális differenciáljainak „lineáris függvénykombinációjaként” állítottuk elõ,

– az f_i függvények közötti bárminemû további kapcsolatot az f_i függvényekre megadott összefüggésekbõl levezetni nem lehet,

– az f_i függvények közötti bárminemû további kapcsolat megadása esetén az *s* függvénynek ehhez a kapcsolathoz tartózó „egyedi” tulajdonságai *meghatározhatók.*

Kitértünk a kontinuummechanikai háttérre is. Megmutattuk, hogy nincs ellentmondás az izotrop anyagokra tett feltevésen, illetve a Cayley-Hamilton-tételen alapuló feszültség-alakváltozás közötti összefüggés független együtthatóinak eltérõ száma között (az elsõbõl kettõ, a másodikból három), ugyanis az elsõ feltétel eleve kizárja az alakváltozási tenzor kvadratikus tagját, így a két feltevés nem azonos.

FÜGGELÉK

A Függelékben megvizsgáljuk a

$$-x_1 \frac{\partial f_3(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \frac{\partial f_3(x_1, x_2)}{\partial x_1}\,. \tag{F.1}$$

egyenletet.

A megoldást hatványalakban keressük.

$$f_3(x_1,x_2)=\overset{11}{f}_3(x_1)^{\overset{12}{f}_3(x_2)}+\overset{21}{f}_3(x_2)^{\overset{22}{f}_3(x_1)}. \tag{F.2}$$

Ekkor (2)

$$-x_1\frac{\partial\,\overset{11}{f}_3(x_1)^{\overset{12}{f}_3(x_2)}+\overset{21}{f}_3(x_2)^{\overset{22}{f}_3(x_1)}}{\partial x_2}=\frac{\partial\,\overset{11}{f}_3(x_1)^{\overset{12}{f}_3(x_2)}+\overset{21}{f}_3(x_2)^{\overset{22}{f}_3(x_1)}}{\partial x_1}. \tag{F.3}$$

alakba írható. A logaritmikus deriválás szerint

$$\begin{aligned}-x_1\frac{\partial\,\overset{12}{f}_3(x_2)}{\partial x_2}\overset{11}{f}_3(x_1)^{\overset{12}{f}_3(x_2)}\ln\overset{11}{f}_3(x_1)-x_1\overset{22}{f}_3(x_1)\frac{\partial\,\overset{21}{f}_3(x_2)}{\overset{21}{f}_3(x_2)\partial x_2}\overset{21}{f}_3(x_2)^{\overset{22}{f}_3(x_1)}=\\=\overset{12}{f}_3(x_2)\frac{\partial\,\overset{11}{f}_3(x_1)}{\overset{11}{f}_3(x_1)\partial x_1}\overset{11}{f}_3(x_1)^{\overset{12}{f}_3(x_2)}+\frac{\partial\,\overset{22}{f}_3(x_1)}{\partial x_1}\overset{21}{f}_3(x_2)^{\overset{22}{f}_3(x_1)}\ln\overset{21}{f}_3(x_2).\end{aligned} \tag{F.4}$$

Kétfelé szeparáljuk, és átrendezzük az (4) egyenletet.

$$\frac{\partial\,\overset{12}{f}_3(x_2)}{\overset{12}{f}_3(x_2)\partial x_2}=\frac{\partial\,\overset{11}{f}_3(x_1)}{-x_1\overset{11}{f}_3(x_1)\ln\overset{11}{f}_3(x_1)\partial x_1}, \tag{F.5a}$$

$$\frac{\partial\,\overset{22}{f}_3(x_2)}{\overset{21}{f}_3(x_2)\ln\overset{21}{f}_3(x_2)\partial x_2}=\frac{\partial\,\overset{22}{f}_3(x_1)}{-x_1\overset{22}{f}_3(x_1)\partial x_1}. \tag{F.5b}$$

Mindegyik két differenciálegyenletre esik szét.

A (5a) bal oldala

$$\frac{\partial\,\overset{12}{f}_3(x_2)}{\overset{12}{f}_3(x_2)}=\partial x_2, \tag{F.6}$$

amelynek a megoldása

$$\overset{12}{f}_3(x_2)=e^{x_2}. \tag{F.7}$$

A (5a) jobb oldala

$$\frac{\partial\,\overset{11}{f}_3(x_1)}{\overset{11}{f}_3(x_1)\ln\overset{11}{f}_3(x_1)}=-x_1\partial x_1, \tag{F.8}$$

amelynek a megoldása

$$\ln(\ln\overset{11}{f}_3(x_1))=\frac{-x_1^{\ 2}}{2}. \tag{F.9}$$

A (5b) bal oldala

$$\frac{\partial \overset{21}{f}_3(x_2)}{\overset{21}{f}_3(x_2)\ln \overset{21}{f}_3(x_2)} = \partial x_2\,, \tag{F.10}$$

amelynek a megoldása

$$\ln(\ln \overset{21}{f}_3(x_2)) = x_2\,. \tag{F.11}$$

A (5b) jobb oldala

$$\frac{\partial \overset{22}{f}_3(x_1)}{\overset{22}{f}_3(x_1)} = -x_1\partial x_1\,, \tag{F.12}$$

amelynek a megoldása

$$\overset{22}{f}_3(x_1) = e^{-\frac{x_1^2}{2}}\,. \tag{F.13}$$

Így a kétféle megoldás

$$f_3(x_1, x_2) = \left(e^{e^{\frac{-x_1^2}{2}}}\right)^{e^{x_2}}, \tag{F.14}$$

$$f_3(x_1, x_2) = (e^{e^{x_2}})^{e^{-\frac{x_1^2}{2}}}\,. \tag{F.15}$$

KIEGÉSZÍTÉS

A kiegészítésben néhány egyedi esetet vizsgálunk meg. Ezek a következõk:

1. $f_3 = 0$
2. $f_3 = \text{const}$
3. $f_2 = f = \text{const}$
4. $f_1 = \hat{}\,x$, $\hat{} = \text{const}$
5. valamint ezek kombinációi, úgy mint 1-3, 1-4, 2-3, 2-4, és 3-4.

A vizsgált egyenletrendszer

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial s}{\partial x_3}\,, \tag{2.1}$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{x_3}\left(\frac{\partial s}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial s}{\partial x_2}\right), \tag{2.2}$$

$$f_3(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{x_3}\frac{\partial s}{\partial x_2}\,. \tag{2.3}$$

A megoldást – mint ahogy eddig is tettük – összeg és szorzatalakban keressük. A részletes levezetéseket mellõzzük, a korábbi eredményeket, módszereket felhasználjuk, bár a hivatkozásokat mellõzzük.

f_3 = 0

A feltétel következtében az alábbi egyenletrendszert kell megoldani.

$$f_1(x_1,x_2,x_3)=\frac{\partial s}{\partial x_3}\,, \tag{K.1}$$

$$f_2(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{x_3}\frac{\partial s}{\partial x_1}\,, \tag{K.2}$$

$$0=\frac{1}{x_3}\frac{\partial s}{\partial x_2}\,. \tag{K.3}$$

A (3) összefüggés következménye, hogy

$$s=s(x_1,x_3)\,. \tag{K.4}$$

Az (1-2) integrálhatósági feltétele

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}=\frac{\partial x_3 f_2}{\partial x_3}\,. \tag{K.5}$$

A megoldás

$$f_1(x_1,x_3)=\overset{1}{c}\,x_1+\overset{1}{f}_1(x_1)+\overset{2}{f}_1(x_3)+\overset{3}{f}_1(x_1)\frac{dx_3\,\overset{4}{f}_2(x_3)}{dx_3}\,, \tag{K.6a}$$

$$f_2(x_1,x_3)=\overset{1}{c}+\frac{d\,\overset{1}{f}_1(x_1)}{dx_1}+\overset{2}{f}_2(x_1)/x_3+\frac{d\,\overset{3}{f}_1(x_1)}{dx_1}\overset{4}{f}_2(x_3)\,. \tag{K.6b}$$

Az entrópia

$$s(x_1,x_3)=\overset{1}{c}\,x_1x_3+\overset{1}{f}_1(x_1)x_3+\int\overset{2}{f}_2(x_1)dx_1+\int\overset{2}{f}_1(x_3)x_3dx_3+\overset{3}{f}_1(x_1)\,\overset{4}{f}_2(x_3)x_3\,. \tag{K.7}$$

f_3 = const

A feltétel következtében az alábbi egyenletrendszert kell megoldani.

$$f_1(x_1,x_2,x_3)=\frac{\partial s}{\partial x_3}\,, \tag{K.8}$$

$$f_2(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{x_3}\frac{\partial s}{\partial x_1}+c_3x_1, \qquad \text{(K.9)}$$

$$c_3=\frac{1}{x_3}\frac{\partial s}{\partial x_2}. \qquad \text{(K.10)}$$

A (10) összefüggés következménye, hogy

$$s=s(x_1,x_3)+c_3x_2x_3. \qquad \text{(K.11)}$$

Tehát fellép egy partikuláris megoldás:

$$f_1=c_3x_2, \qquad \text{(K.12a)}$$

$$f_2=c_3x_1, \qquad \text{(K.12b)}$$

$$f_3=c_3. \qquad \text{(K.12c)}$$

A partikuláris megoldást önállóan kezelve, az elõbbi feladathoz jutunk vissza. Tehát a megoldás

$$f_1(x_1,x_3)=\overset{1}{c}\,x_1+\overset{1}{f}_1(x_1)+\overset{2}{f}_1(x_3)+\overset{3}{f}_1(x_1)\frac{dx_3\,\overset{4}{f}_2(x_3)}{dx_3}+c_3x_2, \qquad \text{(K.13a)}$$

$$f_1(x_1,x_3)=\overset{1}{c}+\frac{d\,\overset{1}{f}_1(x_1)}{dx_1}+\overset{2}{f}_1(x_1)/x_3+\frac{d\,\overset{3}{f}_1(x_1)}{dx_1}\overset{4}{f}_2(x_3)+c_3x_1, \qquad \text{(K.13b)}$$

$$f_3=c_3. \qquad \text{(K.13c)}$$

Az entrópia

$$s(x_1,x_3)=\overset{1}{c}\,x_1x_3+\overset{1}{f}_1(x_1)x_3+\int\overset{2}{f}_1(x_1)dx_1+\int\overset{2}{f}_1(x_3)x_3dx_3+\overset{3}{f}_1(x_1)\,\overset{4}{f}_2(x_3)x_3+c_3x_2x_3. \qquad \text{(K.14)}$$

f_2 = f = const

A feltétel következtében az alábbi egyenletrendszert kell megoldani.

$$f_1(x_1,x_2,x_3)=\frac{\partial s}{\partial x_3}, \qquad \text{(K.15)}$$

$$m=\frac{1}{x_3}\left(\frac{\partial s}{\partial x_1}+x_1\frac{\partial s}{\partial x_2}\right), \qquad \text{(K.16)}$$

$$f_3(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{x_3}\frac{\partial s}{\partial x_2}. \qquad \text{(K.17)}$$

Az (15,17) integrálhatósági feltétele

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial x_3 f_3}{\partial x_3} \,. \tag{K.18}$$

A legáltalánosabb megoldást a szorzatalak adja

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = f_1(x_1)\, f_2(x_2) \frac{dx_3 f_3(x_3)}{dx_3} \,, \tag{K.19a}$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = f_1(x_1) \frac{df_2(x_2)}{dx_2} f_3(x_3) \,. \tag{K.19b}$$

Az entrópia

$$s(x_1, x_2, x_3) = f_1(x_1)\, f_2(x_2)\, f_3(x_3) x_3 + s(x_1, x_3) + s(x_1, x_2) \,. \tag{K.20}$$

Ezután tekintsük a (16) egyenletet! A partikuláris megoldása

$$s_p = \mathrm{m} x_1 x_3 \,. \tag{K.21}$$

Az f_i függvények:

$$f_1 = \mathrm{m} x_1 \,, \tag{K.22a}$$

$$f_2 = \mathrm{m} \,, \tag{K.22b}$$

$$f_3 = 0 \,. \tag{K.22c}$$

A (16) egyenlet általános megoldása

$$s(x_1, x_2, x_3) = P \overset{1}{g}(x_3) + e^P \overset{2}{g}(x_3) \,, \tag{K.23}$$

ahol a P polinom

$$P = \frac{x_1^2}{2} - x_2 \,. \tag{K.24}$$

Az exponenciális függvény összhangban van a (20) általános megoldással, a polinomiális is, csak azt kell észrevenni, hogy az két szorzatfüggvény összege.

A teljes megoldást az általános és a partikuláris összege adja. Tehát

$$s(x_1, x_2, x_3) = P \overset{1}{g}(x_3) + e^P \overset{2}{g}(x_3) + \mathrm{m} x_1 x_3 \,. \tag{K.25}$$

Továbbá

$$f_1 = P \frac{d \overset{1}{g}(x_3)}{dx_3} + e^P \frac{d \overset{2}{g}(x_3)}{dx_3} + \mathrm{m} x_1 \,, \tag{K.26a}$$

$$f_2 = \mathrm{m} \,, \tag{K.26b}$$

$$f_3 = -\overset{1}{g}(x_3) - e^P \overset{2}{g}(x_3)\,. \tag{K.26c}$$

f_1 = • x_1, • = const

A feltétel következtében az alábbi egyenletrendszert kell megoldani.

$$\mathrm{l}\, x_1 = \frac{\partial s}{\partial x_3}\,, \tag{K.27}$$

$$f_2(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{x_3}\left(\frac{\partial s}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial s}{\partial x_2}\right), \tag{K.28}$$

$$f_3(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{x_3}\frac{\partial s}{\partial x_2}\,. \tag{K.29}$$

A (27) összefüggés következménye, hogy

$$s = s(x_1,x_2) + \mathrm{l}\, x_1 x_3\,. \tag{K.30}$$

Elõször tekintsük a partikuláris megoldást!

$$f_1 = \mathrm{l}\, x_1\,, \tag{K.31a}$$

$$f_2 = \mathrm{l}\,, \tag{K.31b}$$

$$f_3 = 0\,. \tag{K.31c}$$

Megjegezzük, hogy ez megegyezik a (22) partikuláris megoldással a ˆ = f feltétel mellett.

Az általános megoldást a (27,28) egyenletbõl kell meghatározni. Ennek az integrálhatósági feltétele

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\partial f_3}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial f_3}{\partial x_2}\,. \tag{K.32}$$

A (32) megoldása formálisan megegyezik a (3.139) megoldásával. Megjegyezzük, hogy a per-x_3 kifejezésekre azért van szükség, hogy az entrópia ne függjön x_3-tól, és ez által legyen az f_1 függvény azonosan zérus (az egy partikuláris megoldástól eltekintve). Tehát, a ˆ-hoz tartózó partikuláris megoldást is feltüntetve:

$$f_1(x_1,x_2,x_3) = \mathrm{l}\, x_1\,, \tag{K.33a}$$

$$f_2(x_1,x_2,x_3) = \left(\overset{51}{F}_1(x_1)x_1 + \frac{d\,\overset{51}{F}_1(x_1)}{dx_1}\right)e^{x_2}/x_3 + x_1 e^{\frac{x_1^2}{2}}\left(\overset{52}{F}_2(x_2) + \frac{d\,\overset{52}{F}_2(x_2)}{dx_2}\right)/x_3 + \tag{K.33b}$$

$$+\frac{d\overset{53}{F}_1(x_1)}{dx_1}x_2/x_3+\overset{54}{F}_1(x_2)x_1/x_3+\overset{0}{F}_1(x_1)/x_3+\mathrm{l},$$

$$f_3(x_1,x_2,x_3)=\overset{51}{F}_1(x_1)e^{x_2}/x_3+e^{\frac{x_1^2}{2}}\frac{d\overset{52}{F}_2(x_2)}{dx_2}/x_3+\overset{53}{F}_1(x_1)/x_3+$$
$$+\overset{54}{F}_2(x_2)/x_3+\overset{1}{C}_1\left(\frac{x_1^2}{2}-x_2\right)/x_3+\overset{1}{C}_2e^{\frac{x_1^2}{2}-x_2}/x_3+\overset{0}{C}/x_3. \tag{K.33c}$$

Az ehhez tartózó entrópia

$$\overset{5}{s}=\overset{51}{F}_1(x_1)e^{x_2}+e^{\frac{x_1^2}{2}}\overset{52}{F}_2(x_2)+\overset{53}{F}_1(x_1)x_2-\int\overset{53}{F}_1(x_1)x_1dx_1+\int\overset{54}{F}_2(x_2)dx_2+\overset{0}{s}+\overset{11}{s}+\overset{12}{s}+\mathrm{l}x_1. \tag{K.34}$$

f_3 = 0 és f_2 = f = const

A feltételek következtében az alábbi egyenletrendszert kell megoldani.

$$f_1(x_1,x_2,x_3)=\frac{\partial s}{\partial x_3}, \tag{K.35}$$

$$\mathrm{m}=\frac{1}{x_3}\left(\frac{\partial s}{\partial x_1}+x_1\frac{\partial s}{\partial x_2}\right), \tag{K.36}$$

$$0=\frac{1}{x_3}\frac{\partial s}{\partial x_2}. \tag{K.37}$$

Itt is fennáll a (3), illetve (37) összefüggések következménye:

$$s=s(x_1,x_3). \tag{K.38}$$

Ezt behelyettesítve (36)-ba nyerjük.

$$\frac{1}{x_3}\left(\frac{\partial s(x_1,x_3)}{\partial x_1}+x_1\frac{\partial s(x_1,x_3)}{\partial x_2}\right)=\mathrm{m}, \tag{K.39}$$

ahonnét

$$s(x_1,x_3)=s(x_3)+\mathrm{m}x_1x_3. \tag{K.40}$$

Tehát

$$f_1=\frac{ds(x_3)}{dx_3}+\mathrm{m}x_1, \tag{K.41a}$$

$$f_2=\mathrm{m}, \tag{K.41b}$$

$$f_3=0. \tag{K.41c}$$

f_3 = const és $f_2 = f$ = const

A feltételek következtében az alábbi egyenletrendszert kell megoldani.

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial s}{\partial x_3}, \tag{K.42}$$

$$\mathrm{m} = \frac{1}{x_3}\left(\frac{\partial s}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial s}{\partial x_2}\right), \tag{K.43}$$

$$c_3 = \frac{1}{x_3}\frac{\partial s}{\partial x_2}. \tag{K.44}$$

Itt is fennáll a (10), azaz a (44) összefüggés következménye:

$$s = s(x_1, x_3) + c_3 x_2 x_3. \tag{K.45}$$

Ezt behelyettesítve (43)-ba nyerjük.

$$\frac{1}{x_3}\left(\frac{\partial s(x_1, x_3) + c_3 x_2 x_3}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial s(x_1, x_3) + c_3 x_2 x_3}{\partial x_2}\right) = \mathrm{m}, \tag{K.46}$$

ahonnét

$$s(x_1, x_3) = \mathrm{m} x_1 x_3 - c_3\left(\frac{x_1^{\ 2}}{2} - x_2\right)x_3 + s(x_3), \tag{K.47}$$

Tehát

$$f_1 = \frac{ds(x_3)}{dx_3} + \mathrm{m} x_1 - c_3\left(\frac{x_1^{\ 2}}{2} - x_2\right), \tag{K.48a}$$

$$f_2 = \mathrm{m}, \tag{K.48b}$$

$$f_3 = c_3. \tag{K.48c}$$

$f_3 = 0$, f_1 = •x_1, • = const

A feltételek következtében az alábbi egyenletrendszert kell megoldani.

$$\mathrm{l}\, x_1 = \frac{\partial s}{\partial x_3}, \tag{K.49}$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{x_3}\left(\frac{\partial s}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial s}{\partial x_2}\right), \tag{K.50}$$

$$0 = \frac{1}{x_3}\frac{\partial s}{\partial x_2}. \tag{K.51}$$

Itt is fennáll a egyrészt a (27) (most (49)), másrészt a (3) (most (51)) összefüggés következménye:

$$s = s(x_1, x_2) + \lambda x_1 x_3 \,. \tag{K.52a}$$

$$s = s(x_1, x_3) \,. \tag{K.52b}$$

A kettõ egyidejûleg csak úgy teljesülhet, ha az entrópia legáltalánosabb formája

$$s = s(x_1) + \lambda x_1 x_3 \tag{K.53}$$

alakú.

Ezt behelyettesítve (50)-be nyerjük

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{x_3}\left(\frac{\partial s(x_1) + \lambda x_1 x_3}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial s(x_1) + \lambda x_1 x_3}{\partial x_2} \right) = \frac{ds(x_1)}{x_3 dx_1} + \lambda \,. \tag{K.54}$$

Összefoglalva

$$f_1 = \lambda x_1 \,, \tag{K.55a}$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{ds(x_1)}{x_3 dx_1} + \lambda \,, \tag{K.55b}$$

$$f_3 = 0 \,. \tag{K.55c}$$

f_3 = const, $f_1 = \lambda x_1$, λ = const

A feltételek következtében az alábbi egyenletrendszert kell megoldani.

$$\lambda x_1 = \frac{\partial s}{\partial x_3} \,, \tag{K.56}$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{x_3}\left(\frac{\partial s}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial s}{\partial x_2} \right), \tag{K.57}$$

$$c_3 = \frac{1}{x_3}\frac{\partial s}{\partial x_2} \,. \tag{K.58}$$

Itt is fennáll egyrészt a (27) (most (56)), másrészt a (10) (most (58)) összefüggés következménye:

$$s = s(x_1, x_2) + \lambda x_1 x_3 \,, \tag{K.59a}$$

$$s = s(x_1, x_3) + c_3 x_2 x_3 \,. \tag{K.59b}$$

A kettõ egyidejûleg csak úgy teljesülhet, ha egyrészt vagy a λ, vagy a c_3 nullával egyenlõ, másrészt s csak x_1-nek a függvénye. Ez utóbbi esetet az imént néztük végig. Ha λ = 0, akkor az entrópia legáltalánosabb formája

$$s = s(x_1) + c_3 x_2 x_3 \,. \tag{K.60}$$

Ezt behelyettesítve (52)-be nyerjük

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{x_3}\left(\frac{\partial s(x_1) + c_3 x_2 x_3}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial s(x_1) + c_3 x_2 x_3}{\partial x_2} \right) = \frac{ds(x_1)}{x_3 dx_1} + c_3 x_1 \,. \tag{K.61}$$

Összefoglalva

$$f_1 = 0 \,, \tag{K.62a}$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{ds(x_1)}{x_3 dx_1} + c_3 x_1 \,, \tag{K.62b}$$

$$f_3 = c_3 \,. \tag{K.62c}$$

f_2 = f = const, f_1 = •x_1, • = const

A feltételek következtében az alábbi egyenletrendszert kell megoldani.

$$\mathrm{l}\, x_1 = \frac{\partial s}{\partial x_3} \,, \tag{K.63}$$

$$\mathrm{m} = \frac{1}{x_3}\left(\frac{\partial s}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial s}{\partial x_2} \right), \tag{K.64}$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{x_3} \frac{\partial s}{\partial x_2} \,. \tag{K.65}$$

Itt is fennáll (27) (most (63)), valamint (16) (most (64)) következménye:

$$s = s(x_1, x_2) + \mathrm{l}\, x_1 x_3 \,, \tag{K.66a}$$

$$s_p = \mathrm{m} x_1 x_3 \,. \tag{K.66b}$$

A két partikuláris megoldás csak úgy fér meg egymással (akkor kompatibilisek), ha ƒ = ˆ! Ez már látszott a két önálló megoldásból is. Legyen a kettõ egyenlõ, azaz ƒ = ˆ = •. Ekkor az entrópia

$$s = s(x_1, x_2) + \mathrm{g} x_1 x_3 \,. \tag{K.67}$$

Az (64) egyenlet általános megoldása – figyelembe véve, hogy az entrópia nem függhet az x_3 változótól – a következõ

$$s(x_1, x_2) = \overset{1}{C}_1 P + \overset{1}{C}_2 e^P \,. \tag{K.68}$$

Összefoglalva:

$$s(x_1, x_2) = \overset{1}{C}_1 P + \overset{1}{C}_2 e^P + \mathrm{g} x_1 x_3 . \tag{K.69}$$

Az f_i függvények

$$f_1 = \mathrm{g} x_1 , \tag{K.70a}$$

$$f_2 = \mathrm{g} , \tag{K.70b}$$

$$f_3 = -(\overset{1}{C}_1 + \overset{1}{C}_2 e^P) / x_3 . \tag{K.70c}$$

Megjegyzés

Elvben csatolható a $f_2 = f$ = const, $f_1 = \hat{}\, x_1$, ˆ = const feltételhez az $f_3 = 0$ feltétel, ebben az esetben $s(x_1, x_2) = \mathrm{g} x_1 x_3$. Ugyanakkor az $f_3 = c_3$ feltétel nem csatolható, mert ellentmondásra vezet.

Budapest, 2007. február hó 25.

Dr. Lámer Géza