Anyagtörvény egyszerűsítése

Tóth János*
BME TTK Matematikai Analízis Tanszék

2007. február 28.

Tartalomjegyzék

*Farkas Henrik emlékének

Kivonat

Általános elegendő feltételt adunk arra, hogy az izotróp rugalmas kontinuumok anyagtörvényében szereplő együtthatófüggvények közül valamelyik lokálisan kifejezhető legyen a másik kettővel. Megvizsgáljuk, hogy az együtthatófüggvényekre tett néhány kézenfekvő speciális előzetes feltevés mikor egyeztethető össze az elegendő feltételekkel; igen ritkán, de nem kizárt, hogy a megmaradó esetek között van fizikailag lényeges.

1. Alapvető segédeszközünk

Ismeretes ([3, 299–301. oldal]), hogy ha $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ független, azaz

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \partial_1 f_1(\mathbf{A}) & \partial_2 f_1(\mathbf{A}) & \partial_3 f_1(\mathbf{A}) \\ \partial_1 f_2(\mathbf{A}) & \partial_2 f_2(\mathbf{A}) & \partial_3 f_2(\mathbf{A}) \end{pmatrix} = 2, \tag{1}$$

de $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ már öszefügg, azaz

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \partial_1 f_1(\mathbf{A}) & \partial_2 f_1(\mathbf{A}) & \partial_3 f_1(\mathbf{A}) \\ \partial_1 f_2(\mathbf{A}) & \partial_2 f_2(\mathbf{A}) & \partial_3 f_2(\mathbf{A}) \\ \partial_1 f_3(\mathbf{A}) & \partial_2 f_3(\mathbf{A}) & \partial_3 f_3(\mathbf{A}) \end{pmatrix} = 2, \tag{2}$$

akkor (alkalmas környezetben) létezik olyan Φ_3 függvény, amellyel

$$f_3 = \Phi_3 \circ (f_1, f_2) \tag{3}$$

teljesül. (Itt és a továbbiakban a rövidség kedvéért $\mathbf{A} := (A_1, A_2, A_3)$.) Az indexek permutálásával kapunk elegendő feltételt olyan Φ_1, Φ_2 létezésére, amellyel

$$f_1 = \Phi_1 \circ (f_2, f_3) \tag{4}$$

vagy

$$f_2 = \Phi_2 \circ (f_3, f_1) \tag{5}$$

fennáll.

A továbbiakban egyre részletesebben kifejtjük az elegendő feltételeket Φ_3 létezésére.

2. A feltételek specializálása a potenciálra

Innen kezdve elkövetjük azt a megszokott szörnyűséget, hogy az s függvénynek és deriváltjainak argumentumát általában nem írjuk ki.

Esetünkben (a kiírás fizikai részével megegyezően, de matematikai részétől eltérően)

$$f_1(\mathbf{A}) := -\partial_3 s \quad f_2(\mathbf{A}) := -\frac{\partial_1 s + A_1 \partial_2 s}{A_3} \quad f_3(\mathbf{A}) := \frac{\partial_2 s}{A_3}, \tag{6}$$

ezért az (1) feltétel most azt jelenti, hogy nem létezik olyan $\overline{\alpha}, \overline{\beta} \in \mathbb{R}, \overline{\alpha}^2 + \overline{\beta}^2 \neq 0$, amellyel

$$\begin{aligned} & \overline{\alpha}\,(\partial_{13}s, \partial_{23}s, \partial_{33}s) \quad + \\ \overline{\beta}\left(\frac{\partial_{11}s + \partial_2 s + A_1\partial_{12}s}{A_3}, \frac{\partial_{21}s + A_1\partial_{22}s}{A_3}, \frac{-\partial_1 s - A_1\partial_2 s + A_3\partial_{31}s + A_1A_3\partial_{32}s}{A_3^2}\right) & \quad = \quad 0 \end{aligned} \tag{7}$$

teljesülne, viszont létezik olyan $\overline{\gamma}, \overline{\delta}, \overline{\varepsilon} \in \mathbb{R}, \overline{\gamma}^2 + \overline{\delta}^2 + \overline{\varepsilon}^2 \neq 0$, amellyel

$$\begin{aligned} & \overline{\gamma}\,(\partial_{13}s, \partial_{23}s, \partial_{33}s) + \\ \overline{\delta}\left(\frac{\partial_{11}s + \partial_2 s + A_1\partial_{12}s}{A_3}, \frac{\partial_{21}s + A_1\partial_{22}s}{A_3}, \frac{-\partial_1 s - A_1\partial_2 s + A_3\partial_{31}s + A_1A_3\partial_{32}s}{A_3^2}\right) & + \\ \overline{\varepsilon}\left(\frac{\partial_{12}s}{A_3}, \frac{\partial_{22}s}{A_3}, \frac{-\partial_2 s + A_3\partial_{32}s}{A_3^2}\right) & = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Mivel (7) miatt $\overline{\varepsilon} \neq 0$, ezért f_3' kifejezhető f_1', f_2' **lineáris** függvényeként:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial_{12}s}{A_3} &= \gamma\partial_{13}s + \delta\frac{\partial_{11}s + \partial_2 s + A_1\partial_{12}s}{A_3} \\
\frac{\partial_{22}s}{A_3} &= \gamma\partial_{23}s + \delta\frac{\partial_{21}s + A_1\partial_{22}s}{A_3} \\
\frac{-\partial_2 s + A_3\partial_{32}s}{A_3^2} &= \gamma\partial_{33}s + \delta\frac{-\partial_1 s - A_1\partial_2 s + A_3\partial_{31}s + A_1A_3\partial_{32}s}{A_3^2}.
\end{aligned} \tag{9}$$

A ([3, 299–301. oldal]) tétel szerint (esetünkben, lényegében, lokálisan) **ez** az elegendő feltétele annak, hogy maga f_3 kifejezhető legyen az f_1, f_2 függvényekkel.

3. Az egyensúlyi entrópiára vonatkozó lineáris másodrendű, változó együtthatós parciális differenciálegyenlet-rendszer

A (9) összefüggés fölírható

$$s''(\mathbf{A})\begin{pmatrix} \delta \\ \delta A_1 - 1 \\ \gamma A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\delta}{A_3} & \frac{\delta A_1 - 1}{A_3} & 0 \end{pmatrix}(s'(\mathbf{A}))^\top \tag{10}$$

alakban, ami azt mutatja, hogy másodrendű, lineáris változó együtthatós parciális differenciálegyenlet-rendszerrel van dolgunk, amely azonban egyszerű szerkezete miatt elsőrendűvé írható át. Legyen ugyanis $t := s'$, akkor a fenti egyenlet ilyen alakú:

$$t'(\mathbf{A})a(\mathbf{A}) = b(\mathbf{A})(t(\mathbf{A}))^\top. \tag{11}$$

Mivel a lineáris változó együtthatós rendszerek már közönséges esetben is meglehetős fejfájást okoznak, arra nem látok reményt, hogy a (11) egyszerűsített alakú egyenlet megoldását tetszőleges a és b együtthatófüggvény esetére explicite, szimbolikusan előállítsuk. Ha ez lenne a cél, ezeket lapozgatnám: [1, 2, 4].

4. Az indexeket ciklikusan permutálva

Az egyenletrendszerek konkrét alakja a másik két esetben némileg különbözik, most ezeket is megadjuk.

4.1. Φ_1 létezése

A (4) egyenletben szereplő Φ_1 függvény létezéséhez elegendő, ha nem létezik olyan $\overline{\alpha}, \overline{\beta} \in \mathbb{R}, \overline{\alpha}^2 + \overline{\beta}^2 \neq 0$, amellyel

$$\overline{\alpha}\left(\frac{\partial_{11}s + \partial_2 s + A_1\partial_{12}s}{A_3}, \frac{\partial_{21}s + A_1\partial_{22}s}{A_3}, \frac{-\partial_1 s - A_1\partial_2 s + A_3\partial_{31}s + A_1A_3\partial_{32}s}{A_3^2}\right) = 0$$

$$\overline{\beta}\left(\frac{\partial_{12}s}{A_3}, \frac{\partial_{22}s}{A_3}, \frac{-\partial_2 s + A_3\partial_{32}s}{A_3^2}\right) = 0 \quad (12)$$

teljesülne, viszont létezik olyan $\overline{\gamma}, \overline{\delta}, \overline{\varepsilon} \in \mathbb{R}, \overline{\gamma}^2 + \overline{\delta}^2 + \overline{\varepsilon}^2 \neq 0$, amellyel (8) teljesül. Mivel (12) miatt $\overline{\gamma} \neq 0$, ezért onnan f_1' kifejezhető f_2', f_3' **lineáris** függvényeként:

$$\begin{aligned}
\partial_{13}s &= \gamma\frac{\partial_{11}s + \partial_2 s + A_1\partial_{12}s}{A_3} + \delta\frac{\partial_{12}s}{A_3} \\
\partial_{23}s &= \gamma\frac{\partial_{21}s + A_1\partial_{22}s}{A_3} + \delta\frac{\partial_{22}s}{A_3} \\
\partial_{33}s &= \gamma\frac{-\partial_1 s - A_1\partial_2 s + A_3\partial_{31}s + A_1A_3\partial_{32}s}{A_3^2} + \delta\frac{-\partial_2 s + A_3\partial_{32}s}{A_3^2}
\end{aligned} \quad (13)$$

A már idézett ([3, 299–301. oldal]) tétel szerint (esetünkben, lényegében, lokálisan) **ez** az elegendő feltétele annak, hogy maga f_1 kifejezhető legyen az f_2, f_3 függvényekkel.

4.2. Φ_2 létezése

Végül az (5) egyenletben szereplő Φ_2 függvény létezéséhez elegendő, ha nem létezik olyan $\overline{\alpha}, \overline{\beta} \in \mathbb{R}, \overline{\alpha}^2 + \overline{\beta}^2 \neq 0$, amellyel

$$\overline{\alpha}\left(\partial_{13}s, \partial_{23}s, \partial_{33}s\right) + \overline{\beta}\left(\frac{\partial_{12}s}{A_3}, \frac{\partial_{22}s}{A_3}, \frac{-\partial_2 s + A_3\partial_{32}s}{A_3^2}\right) = 0 \quad (14)$$

teljesülne, viszont létezik olyan $\overline{\gamma}, \overline{\delta}, \overline{\varepsilon} \in \mathbb{R}, \overline{\gamma}^2 + \overline{\delta}^2 + \overline{\varepsilon}^2 \neq 0$, amellyel (8) teljesül. Mivel (14) miatt $\overline{\delta} \neq 0$, ezért onnan f_2' kifejezhető f_3', f_1' **lineáris** függvényeként:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial_{11}s + \partial_2 s + A_1\partial_{12}s}{A_3} &= \gamma\frac{\partial_{12}s}{A_3} + \delta\partial_{13}s \\
\frac{\partial_{21}s + A_1\partial_{22}s}{A_3} &= \gamma\frac{\partial_{22}s}{A_3} + \delta\partial_{23}s \\
\frac{-\partial_1 s - A_1\partial_2 s + A_3\partial_{31}s + A_1A_3\partial_{32}s}{A_3^2} &= \gamma\frac{-\partial_2 s + A_3\partial_{32}s}{A_3^2} + \delta\partial_{33}s
\end{aligned} \tag{15}$$

Ismét a ([3, 299–301. oldal]) tétel szerint **ez** az elegendő feltétele annak, hogy maga f_2 kifejezhető legyen az f_3, f_1 függvényekkel.

4.3. A parciális differenciálegyenlet-rendszerek

A (13) összefüggés fölírható

$$s''(\mathbf{A})\begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma A_1 + \delta \\ -A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma}{A_3} & \frac{\gamma A_1 + \delta}{A_3} & 0 \end{pmatrix} (s'(\mathbf{A}))^\top \tag{16}$$

alakban. A $t := s'$ definícióval a fenti egyenlet ismét (11) alakú.

Az utolsó eset hasonló, itt

$$a(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 1 \\ A_1 - \gamma \\ -\delta A_3 \end{pmatrix}, \quad b(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{A_3} & \frac{A_1}{A_3} & -\frac{\gamma}{A_3} \end{pmatrix}. \tag{17}$$

5. A megoldás

Most kihasználjuk azt a tényt, hogy az s függvényre vonatkozó másodrendű differenciálegyenletek jobb oldalán mindhárom esetben olyan együtthatómátrix áll, amely a változók alkalmas permutálásával háromszögmátrixszá transzformálható. Ennek első következményeként megállapíthatjuk, hogy a $\partial_2 s$ függvényre vonatkozó elsőrendű homogén lineáris parciális differenciálegyenlet általános megoldása mindhárom esetben meghatározható. A második lépésben pedig be fogjuk látni, hogy az így kapott megoldás a másik két egyenletet automatikusan kielégíti.

5.1. Φ_3 létezése

Tehát egyszerűsítve:

$$f_1 = -s_3 \quad f_2 = -\frac{s_1 + A_1 s_2}{A_3} \quad f_3 = \frac{s_2}{A_3}. \tag{18}$$

A (9) összefüggőségi feltételek (itt az előjelek már ugyanazok, akár a fizikai, akár a matematikai megfogalmazást választjuk):

$$\begin{aligned} s_{12} &= \gamma A_3 s_{13} + \delta(s_{11} + s_2 + A_1 s_{12}) & (19)\\ s_{22} &= \gamma A_3 s_{23} + \delta(s_{21} + A_1 s_{22}) & (20)\\ -s_2 + A_3 s_{32} &= \gamma A_3^2 s_{33} + \delta(-s_1 - A_1 s_2 + A_3 s_{31} + A_1 A_3 s_{32}). & (21) \end{aligned}$$

Az (20) egyenletet megoldva az s_2 függvényre, majd az eredményt integrálva kapjuk, hogy

$$s(\mathbf{A}) = u(\frac{\delta}{2}A_1^2 - A_1 - \delta A_2, \delta \log(A_3) - \gamma A_1).$$

Behelyettesítéssel látható, hogy ez a függvény az (19) és (21) egyenletnek is megoldása. Így tehát – ami bennünket leginkább érdekel –

$$f_1 = -\frac{\delta}{A_3}u_2 \quad f_2 = -\frac{u_1 + \gamma u_2}{A_3} \quad f_3 = -\frac{\delta}{A_3}u_1. \tag{22}$$

5.2. Φ_1 létezése

A (13) összefüggőségi feltételek most:

$$\begin{aligned} A_3 s_{13} &= \gamma(s_{11} + s_2 + A_1 s_{12}) + \delta s_{12} & (23)\\ A_3 s_{23} &= \gamma(s_{21} + A_1 s_{22}) + \delta s_{22} & (24)\\ A_3^2 s_{33} &= \gamma(-s_1 - A_1 s_2 + A_3 s_{31} + A_1 A_3 s_{32}) + \delta(-s_2 + A_3 s_{32}). & (25) \end{aligned}$$

Az (24) egyenletet megoldva az s_2 függvényre, majd az eredményt integrálva kapjuk, hogy

$$s(\mathbf{A}) = u(A_1 + \gamma \log(A_3), A_2 + \frac{\gamma^2}{2}\log^2(A_3) - (\gamma A_1 + \delta)\log(A_3)).$$

Behelyettesítéssel látható, hogy ez a függvény az (23) és (25) egyenletnek is megoldása. Így tehát most

$$f_1 = -\frac{\gamma u_1 + (A_1\gamma + \delta + \gamma^2 \log(A_3)u_2}{A_3} \tag{26}$$

$$f_2 = -\frac{u_1 + (A_1 + \gamma \log(A_3)u_2}{A_3} \tag{27}$$

$$f_3 = \frac{u_2}{A_3}. \tag{28}$$

5.3. Φ_2 létezése

A (15) összefüggőségi feltételek most:

$$s_{11} + s_2 + A_1 s_{12} = \gamma s_{12} + \delta A_3 s_{13} \tag{29}$$

$$s_{21} + A_1 s_{22} = \gamma s_{22} + \delta A_3 s_{23} \tag{30}$$

$$-s_1 - A_1 s_2 + A_3 s_{31} = \gamma(-s_2 + A_3 s_{32}) + \delta A_3^2 s_{33}). \tag{31}$$

Az (30) egyenletet megoldva az s_2 függvényre, majd az eredményt integrálva kapjuk, hogy

$$s(\mathbf{A}) = u(A_2 - \frac{A_1^2}{2} + \gamma A_1, A_3 e^{\delta A_1}).$$

Behelyettesítéssel látható, hogy ez a függvény az (29) és (31) egyenletnek is megoldása. Így tehát ekkor

$$f_1 = u_2 e^{-A_1 \delta} \quad f_2 = -\frac{\gamma u_1 + \delta A_3 e^{\delta A_1}}{A_3} \quad f_3 = \frac{u_1}{A_3}. \tag{32}$$

6. Az f_i együtthatófüggvényekre rótt néhány feltevés összeegyeztethetősége a funkcionális függéssel

6.1. $\boxed{f_3 = 0}$

Ez a feltevés pontosan akkor egyeztethető össze az egyes Φ_i függvények létezésére vonatkozó elegendő feltételekkel, ha s az alábbi alakú.

eset	s alakja	f_1	f_2	f_3
Φ_1	$\nu(A_1+\gamma\log(A_3))$	$-\frac{\gamma\nu'}{A_3}$	$-\frac{\nu'}{A_3}$	0
Φ_2	$\nu(A_3e^{\delta A_1})$	$-\nu' e^{\delta A_1}$	$-\nu'\delta e^{\delta A_1}$	0
Φ_3	$\nu(\delta\log(A_3)-\gamma A_1)$	$-\frac{\delta\nu'}{A_3}$	$\frac{\gamma\nu'}{A_3}$	0

6.2. $\boxed{f_3 = \textbf{const} =: K}$

Az előző eset látszólagos általánosítása; $s_2 = KA_3 \Longrightarrow s = KA_2A_3 + u(A_1, A_3)$, ha ezt összevetjük az általános eredményekkel, akkor kiderül, hogy csak akkor teljesülhet, ha $K = 0$.

6.3. $\boxed{f_2 = \textbf{const} =: \mu}$

Ez mindhárom esetben csak úgy fordulhat elő, ha $\mu = 0$.

eset	s alakja	f_1	f_2	f_3
Φ_1	állandó	0	0	0
Φ_2	$\nu(A_2-\frac{A_1^2}{2})$	0	0	$\frac{\nu'}{A_3}$
Φ_3	állandó	0	0	0

6.4. $\boxed{f_1 = \lambda A_1}$

Csak akkor egyeztethető össze a feltételekkel, ha $\lambda = 0$.

eset	s alakja	f_1	f_2	f_3
Φ_1	$\gamma=\delta=0, \nu(A_1, A_2)$	0	$-\frac{\nu_1+A_1\nu_2}{A_3}$	$\frac{\nu_2}{A_3}$
Φ_2	$w(A_2-\frac{A_1^2}{2}+\gamma A_1)$	0	$-\frac{\gamma w'}{A_3}$	$\frac{w'}{A_3}$
Φ_3	$\delta=0, w(A_1)$	0	$-\frac{w'}{A_3}$	0

6.5. $\boxed{f_1 = \lambda A_1, f_2 = \textbf{const} =: \mu}$

Az előző két eset alapján $\lambda = \mu = 0$,

eset	s alakja	f_1	f_2	f_3
Φ_1	$\gamma=\delta=0$, állandó	0	0	0
Φ_2	$\nu(A_2-\frac{A_1^2}{2})$	0	0	$\frac{\nu'}{A_3}$
Φ_3	$\delta=0$, állandó	0	0	0

6.6. $\boxed{f_2 = \mathbf{const} =: \mu, f_3 = 0}$

Itt s állandó, $f_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$ az összes esetben.

6.7. $\boxed{f_1 = \lambda A_1, f_3 = 0}$

Csak akkor egyeztethető össze a feltételekkel, ha $\lambda = 0$.

eset	s alakja	f_1	f_2	f_3
Φ_1	$\gamma = \delta = 0, w(A_1)$	0	$-\frac{w'}{A_3}$	0
Φ_2	állandó	0	$-\frac{\gamma w'}{A_3}$	0
Φ_3	$\delta = 0, w(A_1)$	0	$-\frac{w'}{A_3}$	0

6.8. $\boxed{f_2 = \mathbf{const} =: \mu, f_3 = \mathbf{const} =: K}$

Látszólagos általánosítás, csak $K = 0$ esetén használható, de azt már tárgyaltuk fönt.

6.9. $\boxed{f_1 = \lambda A_1, f_3 = \mathbf{const}}$

Látszólagos általánosítás, csak $K = 0$ esetén használható, de azt már tárgyaltuk fönt.

7. Egy végső figyelmeztetés

Megoldandó problémák persze maradtak még, a legfontosabb ezek közül az, hogy itt **elegendő** feltételek fennállását vizsgáltuk, ha tehát azok nem teljesülnek, abból nem követekzik, hogy nem állnak fenn a megfelelő funkcionális kapcsolatok.

Hivatkozások

[1] Гайшун, И. В.: *Линейные уравнения в полных производных*, Наука и техника, Минск, 1989. (Egzakt lineáris differenciálegyenletek – oroszul).

[2] Gaishun, I. V.: *Introduction to the Theory of Linear Nonstationary Systems*, Inst. Mat. NAN Belarusi, Minsk, 1999 (In Russian).

[3] Pontrjagin, L. Sz.: *Közönséges differenciálegyenletek*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972.

[4] Рождественский, Б. Л.: *Системы квазилинейных уравнений*, Наука, Москва, 1968. (Kvázilineáris differenciálegyenlet-rendszerek – oroszul. Kende u.: 18028).